Uber die Grundlagen der Quantenmechanik

Translation by: Chris Mitsch

January 2019

1 Introduction

Die neuere Entwicklung der Quantenmechanik, die an die Arbeiten von Heisenberg[1], Born und Jordan einerseits und Schrø"dinger[2] andererseits anknüpft, hat es ermöglicht, das ganze Gebiet der Atomerscheinungen unter einen einheitlichen Gesichtpunkt zusammenzufassen und die wichtigsten Beobachtungsergebnisse zu erklären, so dass man kaum noch zweifeln kann, in ihr einen Gedankenkomplex von gleicher Bedeutung wie etwa die klassiche Mechanik oder Elektrodynamik gefunden zu haben. Bei dieser hohen Bedeutung der Quantenmechanik ist es ein dringendes Bedürfnis, ihre Prinzipien so klar und allgemein wie möglich zu erfassen. Hier hat nun Jordan[3] im Anschluss an eine Idee von Pauli[4] eine Formulierung und Begründung der Theorie gegeben, die von grosser Allgemeinheit ist und dem physikalischen Charakter der zu grunde liegenden Erscheinungen sehr gut angepasst erscheint. Unabhängig von Jordan ist Dirac[5] zu ähnlichen Anschauungen gelangt.

Die vorliegende Abhandlung ist aus einer Vorlesung hervorgegangen, die D. Hilbert im Wintersemester 1926/27 über die neuere Entwicklung der Quantenmechanik hielt, und deren Vorbereitung mit wesentlicher Hilfe von L. Nordheim geschah. Wichtige Stücke der mathematischen Durchführung rühren von J. v. Neumann her. Die endgültige Abfassung dieser Abhandlung hat L. Nordheim besorgt. Wir glauben, dass die Formulierung der Jordanschen und Diracschen Gedanken, zu der wir hier gelangt sind, erheblich einfacher und daher durchsichtiger und leichter verständlich geworden ist.

Der physikalische Grundgedanke der ganzen Theorie besteht darin, dass an Stelle von strengen funktionalen Beziehungen der gewöhnlichen Mechanik überall Wahrscheinlichkeitsrelationen treten.

Die Art dieser Relationen wird am besten durch ein besonders wichtiges Beispiel erklärt. Ist der Wert W_n der Energie des Systems bekannt, und zwar gleich dem n-ten Eigenwert eines gequantelten Systems, so ist nach Pauli

$$|\psi_n(x)|^2$$

The recent development of quantum mechanics, which ties together the work of Heisenberg, Born and Jordan on the one hand and Schrödinger on the other, has made it possible to summarize the whole field of atomic phenomena from a uniform standpoint and clarify the most important observational conclusions, in such a way that one can hardly doubt that in it a complex of concepts of similar significance to classical mechanics or electrodynamics has been found. With this high significance of quantum mechanics there is a pressing need to realize its laws as clearly and generally as possible. Here Jordan, in following an idea from Pauli, has given a formulation and foundation which is of greater generality and which appears very well adapted to the physical character of the underlying phenomena. Independently of Jordan, Dirac has come to similar conceptions.

The present paper has emerged from a lecture, given by D. Hilbert in the Winter Semester 1926/27 on the recent development of quantum mechanics, and it was prepared with the more essential help of L. Nordheim. Important parts of the mathematical execution originate from J. v. Neumann. The final write-up of this paper was provided by L. Nordheim. We believe that the formulation of Jordan's and Dirac's ideas, which we have worked out here, have become substantially simpler and therefore more transparent and more easily understandable.

The basic physical idea of the whole theory consists in bringing to light the general probability relations in patches of rigorous functional relationships in ordinary mechanics.

The nature of these relationships is best explained through a particularly important example. If the value W_n of the energy of the system is known, and namely equal to the n-th eigenvalue of the quantized system, then following die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass die Koordinate des Systems einen,

Wert zwischen x und $x + dx$ hat, wenn ψ_n die zu dem Eigenwert W_n gehörige Eigenfunktion bedeutet.

Allgemein wird verlangt, dass zwischen zwei verschiedenen mechanischen Grössen F_1 und F_2 stets eine solche Wahrscheinlichkeitsbeziehung besteht. Unter mechanischer Grösse verstehen wir hierbei Dinge wie Entfernungen, Bahnradius, Energie, Impuls, d.h. Grössen, die in der gewöhnlichen Mechanik Funktionen einer mechanischen Koordinate q und des zu ihr kanonisch konjugierten Impulses p sind.

Wir beschränken uns dabei der Einfachheit halber auf Systeme mit einem einzigen Freiheitsgrad. Jedoch ist diese Beschränkung keineswegs wesentlich, und es lassen sich Systeme mit mehreren Freiheitsgraden ganz analog behandeln. Auf die Wahl des Koordinatensystems kommt es ferner, wie sich herausstellen wird, nicht an.

Der Weg, der nun zu dieser Theorie führt, ist folgender: Man stellt gewisse physikalische Forderungen an diese Wahrscheinlichkeiten, die durch unsere bisherigen Erfahrungen und Entwicklungen nahe gelegt sind, und deren Erfüllung gewisse Relationen zwischen den Wahrscheinlichkeiten erfordern. Dann sucht man zweitens einen einfachen analytischen Apparat, in dem Grössen auftreten, die genau dieselben Relationen erfüllen. Dieser analytische Apparat, und damit die in ihm auftretenden Rechengrössen, erfahren nun auf Grund der physikalischen Forderungen eine physikalische Interpretation. Das Ziel ist dabei, die physikalischen Forderungen so vollständig zu formulieren, dass der analytische Apparat gerade eindeutig festgelegt wird. Dieser Weg ist also der einer Axiomatisierung, wie sie z.B. in der Geometrie durchgeführt worden ist. Durch die Axiome werden die Relationen zwischen den geometrischen Gebilden, wie Punkt, Gerade, Ebene, beschrieben, und dann gezeigt, dass diese Relationen gerade ebenso bei einem analytischen Apparat, nämlich den linearen Gleichungen erfüllt sind. Dadurch kann man wieder umgekehrt aus den Eigenschaften der linearen Gleichungen geometrische Sätze gewinnen.

Genau so ordnet man in der neuen Quantenmechanik formal nach einer bestimmten Vorschrift jeder mechanischen Grösse ein mathematische Gebilde als Repräsentanten zu, das zunächst eine reine Rechengrösse ist, aus der man aber Aussagen über die Repräsentanten anderer Grössen, und dann durch Zurückübersetzung Aussagen über wirkliche physikalische Dinge erhalten kann.

Solche Repräsentanten sind die Matrizen in der Heisenbergschen, die q-Zahlen in der Diracschen und die Operatoren in der Schrödingerschen Theorie und ihrer jetzigen Weiterbildung.

Es ist also zu beachten, dass wir zwei ganz verschiedene Klassen von Dingen betrachten, nämlich einerseits die messbaren Zahlenwerte physikalis-

Pauli the probability density that the system coordinate has a value between x and $x + dx$ is given by

$$|\psi_n(x)|^2$$

, where ψ_n is the eigenfunction associated with the eigenvalue W_n.

In general it is required that between two distinct mechanical quantities F_1 and F_2 there always exists such a probability relation. Here we understand mechanical quantities as things like distances, orbital radius, energy, momentum, i.e., quantities which in ordinary mechanics are functions of mechanical coordinates q and their canonically conjugate momentums p.

For the sake of simplicity, we restrict ourselves to systems with one degree of freedom. Having said this, this restriction is in no way essential, and systems with more degrees of freedom can be treated analogously. As will be proved, it does not depend on the choice of coordinate system.

The way to this theory is as follows: Certain physical demands on these probabilities are suggested by our past experiences and trends, and their satisfaction necessitates certain relations between the probabilities. Secondly, one seeks a simple analytic apparatus in which quantities occur that satisfy precisely the same relations. This analytic apparatus, and with it the operands occurring in it, now undergoes a physical interpretation on the basis of the physical demands. The aim in doing so is to so fully formulate the physical demands that the analytic apparatus is clearly defined. This way is thus that of an axiomatization, as has been carried out, for example, with geometry. Through the axioms the relations between the elements of geometry, point, line, plane, are characterized, and then it is shown that these relations are exactly satisfied by an analytic apparatus, namely the linear equations. Through it one can again recover geometric propositions from the properties of the linear equations.

In the new quantum mechanics, one formally assigns a mathematical element, which is in the first instance a mere operand, as representatives according to a certain specification of each of the mechanical quantities, but from which one can receive statements about the representatives of other quantities and thus, through back-translating, statements about real physical things.

Such representatives are respectively the matrices in the Heisenberg, the q-numbers in the Dirac, and the operators in the Schrödinger theories and their present developments.

It is therefore important to note that we examine two wholly different classes of things, namely on one hand the measurable numerical values of cher Grössen und andererseits die ihnen zugeordneten Operatoren, mit denen lediglicch nach den Regeln der Quantenmechanik gerechnet wird.

Das oben angedeutete Verfahren der Axiomatisierung wird nun in der Physik gewöhnlich nicht genau so befolgt, sondern der Weg zur Aufstellung einer neuen Theorie ist, wie in der Regel, so auch hier, folgender.

Man mutmasst meistens den analytischen Apparat, bevor man noch das vollständige Axiomensystem aufgestellt hat, und kommt dann erst durch die Interpretation des Formalismus zur Aufstellung der physikalischen Grundrelationen. Es ist schwer, eine solche Theorie zu verstehen, wenn man diese beiden Dinge, den Formalismus und seine physikalische Interpretation, nicht scharf genug auseinanderhält. Diese Scheidung soll hier möglich deutlich durchgeführt werden, wenn wir auch, dem jetzigen Zustand der Theorie entsprechend, noch nicht eine vollständige Axiomatik begründen wollen. Das, was jedenfalls eindeutig festliegt, ist der analytische Apparat, der—rein mathematisch—auch keiner Abänderung fähig ist. Was dagegen modifiziert werden kann, und vorausichtlich auch noch werden wird, ist die physikalische Interpretation, bei der eine gewisse Freiheit und Willkür besteht.

Durch die Axiomatisierung verlieren die vorher etwas vagen Begriffe, wie Wahrscheinlichkeit und so weiter, ihren mystischen Charakter, da sie dann durch die Axiome implizit definiert sind.

physical quantities and on the other their assigned operators, which are calculated with strictly according to the rules of quantum mechanics.

The above suggested procedure of axiomatization is not typically followed in physics now, but rather is the way to the erection of a new theory, as here, according to the following principles.

More often than not, one supposes an analytic apparatus before one has yet specified a complete system of axioms, and then arrives at the establishment of the basic physical relations only by the interpretation of the formalism. It is difficult to comprehend such a theory when one cannot sharply distinguish between these two things, the formalism and its physical interpretation. This divorce should here be made as clearly as possible, when we also, in accordance with the present state of the theory, don't yet want to found a complete axiomatics. In any case, what is certainly well-situated is the analytic apparatus, which—as pure mathematical—is also capable of no modification. What can, and probably will, be modified about it is the physical interpretation, with which exists a certain freedom and arbitrariness.

Through the axiomatization the previously somewhat vague concepts, like probability and so on, lose their mystical character, since they are thereby implicitly defined by the axioms.

1 S. z.B. W. Heisenberg, Math Annalen 95 (1926), S. 683.

2 E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig 1927.

3 P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. 40 (1927), S. 204 und Gött. Nachr. 1926, S. 162. Die formalen Zusammenhänge sind zum Teil auch unabhängig von F. London. Zeitschr. f. Phys. 40 (1926), S. 193 gefunden worden.

4 W. Pauli jr. Zeitschr. f. Phys. 41 (1927), S. 21.

5 P.A.M. Dirac, Proc. Royal Soc. (A), 113 (1927), S. 621.

2 The physical axioms

Wir gehen jetzt dazu über, die physikalischen Forderungen anzugeben. Ihr Sinn wird allerdings vielleicht erst dann völlig klar werden, wenn ihr Zusammenhang mit dem Formalismus erläutert ist. Die Schwierigkeit der neuen Vorstellungen beruht zum grossen Teil darauf, dass diese physikalischen Forderungen selbst sehr fremd und meuartig erscheinen. Es sei ferner gleich hier darauf hingewiesen, dass die Forderungen I–VI nur die allgemeinen Richtlinien für die Wahl des analytischen Apparates gehen sollen, aber keine eindeutige logische Festlegung.

Zunächst fassen wir unser obiges Postulat von dem Wahrscheinlichkeitzusammenhang in eine Formel.

I. Zu zwei mechanischen Grössen $F_1(pq)$ und $F_2(pq)$ gibt es stets eine Funktion zweier Variablen

$$\phi(xy; F_1 F_2)$$

We now proceed to specify the basic physical principles. However, their meaning will perhaps become fully clear only when their relation with the formalism is explained. The difficulty of the new presentation is due in large part to these physical principles themselves seeming foreign and novel. It should also be pointed out here that the principles I–VI should go only as general guidelines for the choice of analytic apparatus, but no definite logical convention.

First we must capture our above postulate for the probability connection in a formula.

I. Given two mechanical quantities $F_1(pq)$ and $F_2(pq)$, there is always a function of two variables

$$\phi(xy; F_1 F_2)$$

derart, dass

$$\phi(xy; F_1F_2)\overline{\phi}(xy; F_1F_2) = w(xy; F_1F_2)$$

die relative Wahrscheinlichkeitsdichte dafür ist, dass für gegebenen Wert y von F_2 der Wert von F_1 zwischen x und $x + dx$ liegt.

ϕ heisst dabei die *Wahrscheinlichkeitsamplitude*. Diese Definition bedeutet also, dass die Wahrscheinlichkeit, dass für festes y der Wert von x im Intervall a b liegt, proportional zu

$$\int_a^b w(xy; F_1F_2)dx$$

ist. Nur Aussagen dieser Art sollen einen physikalischen Sinn haben. Da dieses Integral im allgemeinen noch von y abhängt, so sieht man, dass unsere Wahrscheinlichkeiten nur relative sein können [1]

II. Die Amplituden bzw. Wahrscheinlichkeiten sollen weiter noch folgenden Bedingungen genügen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass für einen gegebenen Wert von $F_1 = x$, F_2 einen Wert zwischen y und $y + dy$ habe, sei durch dieselbe Funktion $w(xy; F_1F_2)$ gegeben. Diese Forderung zeigt übrigens wieder, dass unsere Theorie nur *relative* Wahrscheinlichkeiten geben kann.

III. Weiter wird zu verlangen sein, dass für die Beziehung einer Grösse zu sich selbst, also für $w(xy; F_1F)$, eine scharfe. Bestimmung eintritt, derart, dass also jeder mechanischen Grösse wirklich ein bestimmter Zahlenwert zugeordnet werden kann.

IV. Eine weitere sehr wichtige Beziehung stellt die Kompositionsregel zweier Amplituden dar. Seien F_1, F_2, F_3 drei mechanische Grössen, und x, y, z die zugehörigen Zahlenwerte, so soll die Beziehung gelten

$$\phi(xz; F_1F_3) = \int \phi(xy; F_1F_2)\phi(yz; F_2F_3)dy.$$

Diese Forderung stellt offenbar ein Analogon zu deim Additions- und Multiplikationstheorem der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsrechung dar, nur dass sie hier für die Amplituden anstatt für die Wahrscheinlichkeiten selbst gelten soll.

Hierin besteht eben der charakteristische Unterschied zu der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsrechung, dass überall an Stelle der Wahrscheinlichkeiten selbst zunächst die Amplituden auftreten, die im allgemeinen komplexe Grössen werden, und erst absolut genommen und quadriert gewöhnliche Wahrscheinlichkeiten ergeben.

V. Als weitere physikalische Forderung ist noch zu stellen, dass die Wahrscheinlichkeiten nur von der funktionalen Natur der Grössen $F_1(pq)$ und $F_2(pq)$ abhängen, also ihrer kinematischen Verknüpfung, und nicht etwa noch von speziellen Eigenschaften des gerade untersuchten mechanischen Systems, wie etwa seiner Hamiltonschen Funktion.

VI. Als letzte Forderung ist schliesslich zu stellen, dass die Wahrschein-

such that

$$\phi(xy; F_1F_2)\overline{\phi}(xy; F_1F_2) = w(xy; F_1F_2)$$

is the relative probability density that the value of F_1 lies between x and $x+dx$ given a value y of F_2.

ϕ is therefore called the *probability amplitude*. This definition also means that the probability that x lies in the interval a b for a fixed value y is proportional to

$$\int_a^b w(xy; F_1F_2)dx$$

. Only statements of this form should have a physical meaning. One sees that our probabilities can only be relative since this integral in general depends on y.

II. The amplitudes, or rather the probabilities, should further satisfy the following basic conditions. For a given value of $F_1 = x$, the probability density that F_2 has a value between y and $y + dy$ is given through this same function $w(xy; F_1F_2)$. Incidentally, this principle again demonstrates that our theory can only give *relative* probabilities.

III. Further it will be demanded that the relation of a quantity to itself, as for $w(xy; F_1F)$, is a sharp one. Determination therefore occurs such that every mechanical quantity can really be assigned a specific numerical value.

IV. A further very important relationship is the composition rule of two amplitudes. Let F_1, F_2, F_3 be three mechanical quantities and x, y, z their corresponding numerical values, then the relation

$$\phi(xz; F_1F_3) = \int \phi(xy; F_1F_2)\phi(yz; F_2F_3)dy.$$

ought to obtain. This demand evidently represents an analog to the addition and multiplication theorems of the ordinary probability calculus, only that here they should hold for the amplitudes instead of for the probabilities themselves.

Here exists the characteristic difference with the ordinary probability calculus, that in place of of probabilities themselves appear firstly the amplitudes, which are in general complex quantities, yielding ordinary probabilities only when taken absolutely and squared.

V. As a still further physical demand, the probabilities depend only on the functional nature of the quantities $F_1(pq)$ und $F_2(pq)$, that is, on their kinematic link, and not still on any special properties of the mechanical system being examined, such as on its Hamiltonian function.

VI. Finally, as a last demand, we require that the probabilities do not lichkeiten unabhängig von dem speziell gewählten Koordinatensystem werden.

Diesen Forderungen, deren eventuelle wechselseitige Abhängigkeit und Vollständigkeit wir nicht weiter untersuchen wollen, wird nun genügt durch den mathematischen Formalismus einer allgemeinen Operatorenrechnung. Die Schrödingerschen Differentialgleichungen und die eingangs erwähnte Deutung der Eigenfunktionen kommen dabei als Spezialfälle heraus, was natürlich die stärkste Stütze für die Richtigkeit der hier dargestellten Anschauungen bildet.

Nach der Erklärung der logischen Struktur der Theorie kommen wir zu dem Hauptpunkt, dem anayltischen Formalismus. Dabei sei besonders betont, dass wir in der vorliegenden Darstellung zugunsten einer leichteren Verständlichkeit und Durchsichtigkeit auf vollständige mathematische Exaktheit verzichten, und es insbesondere dahingestellt sein lasse, abzugrenzen, in welchem Bereich einzelne Operationen durchführbar bzw. zulässig sind.

depend on a particular choice of coordinate system.

These demands, whose possible mutual dependency and completeness we will not investigate further, are now satisfied by the mathematical formalism of a general operator calculus. The Schrödinger differential equations and the interpretation of the eigenfunctions mentioned at the outset thereby come out of it as special cases, which, of course, forms the strongest support for the views presented here.

After the explanation of the logical structure of the theory we will come to the principal point, the analytic formalism. It will there be especially emphasized that in the present depiction we forgo mathematical exactness in favor of an easier understanding and transparency, and it in particular leaves open the question to delineate the respective extent to which individual operations can viably be permitted.

1 Über die Normierungsmöglichkeiten siehe P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. 41 (1927), S. 797.

3 Basic formulas of the operator calculus

Der Zusammenhang der Schrödingerschen Theorie mit der Heisenbergschen Matrizenmechanik wird bekanntlich durch eine Operatorenrechnung geliefert [1]. Diese erweist sich nun in entsprechender Verallgemeinerung als das analytische Gerüs der allgemeinen Quantenmechanik. Wir stellen deshalb zunächst die wichtigsten Regeln zusammen, ohne allerdings die analytischen Vorassetzungen, die für ihre Gültigkeit jedesmal erforderlich sind, genau zu prüfen.

Als linearen Operator bezeichnen wir eine Zuordnung, bei der jeder Funktion f eines Argumentes eine Funktion Tf entspricht. Dabei soll

$$T(f+g) = Tf + Tg,$$
$$T(cf) = cTf$$

sein, wenn c eine Konstante ist.

Weiter erklären wir noch folgende Rechenoperationen für zwei Operatoren T und S

$$(T+S)f = Tf + Sf,$$
$$(cT)f = c(Tf),$$
$$(TS)f = T(Sf).$$

Ferner definieren wir den Übergang zu dem konjugiert komplexen Operator durch

$$\overline{T}f = \overline{(T\overline{f})}; (\overline{f}(x) = \overline{f(x)}.$$

Sind T und S lineare Operatoren, so sind es $\overline{T}$, $T+S$, cT und TS offenbar ebenfalls.

The connection of Schrödinger's theory with Heisenberg's matrix mechanics is known to be had through an operator calculus. This now proves itself in accordance with generalization as the analytic framework of general quantum mechanics. We therefore first collect together the most important rules, but without the analytic assumptions, which are in any case necessary for precisely examining their validity.

A linear operator is an assignment in which each function f of an argument corresponds to a function Tf. Thus we require that

$$T(f+g) = Tf + Tg, \tag{1a}$$
$$T(cf) = cTf, \tag{1b}$$

where c is a constant.

Next we state the following arithmetic operations for two operators T and S

$$(T+S)f = Tf + Sf, \tag{2a}$$
$$(cT)f = c(Tf), \tag{2b}$$
$$(TS)f = T(Sf). \tag{2c}$$

Furthermore we define the transition to the complex conjugate operator through

$$\overline{T}f = \overline{(T\overline{f})}; (\overline{f}(x) = \overline{f(x)}. \tag{3}$$

If T and S are linear operators, then obviously $\overline{T}$, $T+S$, cT and TS are as well.

Die durch (2a) und (2b) definierte Addition ist offenbar kommutativ und assoziativ, die Multiplikation assoziativ und in bezug auf die Addition distributiv. Hingegen ist das kommutative Gesetz für die Multiplikation nicht immer erfüllt.

Der Operator, der jeder Funktion f diese selbst zuordnet, ist offenbar ebenfalls ein linearer Operator. Wir bezeichnen ihn mit $\mathbb{1}$. Für ihn gilt identisch

$$T\mathbb{1} = \mathbb{1}T = T$$

.

Gibt es zu einem Operator T einen anderen Operator S, so dass

$$TS = ST = \mathbb{1}$$

wird, so nennen wir S zu T reziprok und bezeichnen ihn mit T^{-1}. Also ist

$$TT^{-1} = T^{-1}T = \mathbb{1}$$

Für zwei beliebige Operatorn gilt ferner, wie leicht ersichtlich, die Regel

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}.$$

Es ist nun für spätere Zwecke notwendig, anzeigen zu können, welche Variable die Argumente von f bzw. Tf sein sollen. Dies ist um so mehr am Platze, als die Variablen in vielen Fällen nicht alle reellen Werte annehmen dürfen, sondern auf ein gewisses Eigenwertspektrum beschränkt werden müssen. Wir führen zu diesem Zwecke ein neues Symbol, den *vollständigen Operator* $T^{\binom{x}{y}}$ ein, welcher anzeigen soll, dass durch die Operation T, angewandt auf eine Funktion $f(y)$, diese in eine Funktion $(Tf)(x)$ übergeführt wird. Dabei können speziell auch x und y dieselbe Variable werden. Zu einem bestimmten Operator T gehören also eine ganze Schar vollständiger Operatoren $T^{\binom{x}{y}}$, $T^{\binom{u}{v}}$,. . . .

Für das Rechnen mit vollständigen Operatoren $T^{\binom{x}{y}}$, $S^{\binom{x}{y}}$ führen wir fol-

Addition, as defined by (2a) and (2b), is obviously associative and commutative, and multiplication is associative and distributes over addition. On the contrary, the commutative law for multiplication is not always satisfied.

The operator that assigns to each function f itself, is obviously also a linear operator. We designate it with $\mathbb{1}$. For it these are identical

$$T\mathbb{1} = \mathbb{1}T = T.$$

$$\text{Placeholder: No equation 4 in original.} \tag{4}$$

If for an operator T there is another operator S such that [5]

$$TS = ST = \mathbb{1},$$

then we call S reciprocal to T, and we designate it with T^{-1}. Thus it is that

$$TT^{-1} = T^{-1}T = \mathbb{1} \tag{5}$$

. Further, as is easily seen, we have for two arbitrary operators the rule

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}. \tag{6}$$

It is necessary for later purposes to be able to indicate which variables are meant as arguments of f and Tf, respectively. This is all the more appropriate since the variables in many cases do not take all real values, but must be restricted to a certain eigenvalue spectrum. For this purpose we introduce a new symbol, the complete operator $T^{\binom{x}{y}}$, which should indicate that, by applying the operation T, a function $f(y)$ will be transformed into a function $(Tf)(x)$. By this, x and y can become the same variable. To a particular operator T there belong a whole host of complete operators $T^{\binom{x}{y}}$, $T^{\binom{u}{v}}$,. . . .

For two complete operators $T^{\binom{x}{y}}$ and $S^{\binom{x}{y}}$, we introduce the following obgende naheliegende Bezeichnungen ein

$$\overline{T^{\binom{x}{y}}} = \overline{T}^{\binom{x}{y}},$$
$$T^{\binom{x}{y}} + S^{\binom{x}{y}} = (T+S)^{\binom{x}{y}},$$
$$cT^{\binom{x}{y}} = (cT)^{\binom{x}{y}},$$
$$T^{\binom{x}{y}} S^{\binom{y}{z}} = (TS)^{\binom{x}{z}},$$
$$(T^{\binom{x}{y}})^{-1} = (T^{-1})^{\binom{y}{x}},$$

ferner für Funktionen mehrerer Variablen $f(y,v)$ [7a]

$$(T^{\binom{x}{y}} + S^{\binom{u}{v}}) f(y,v) = T^{\binom{x}{y}} f(y,v) + S^{\binom{u}{v}} f(y,v).$$

Mit Hilfe der vollständigen Operatoren kann man—das ist der eigentliche Grund zu ihrer Einführung—eine Integraldarstellung der Operatoren erreichen.

$$T^{\binom{x}{y}}(f(y)) = \int \phi(xy) f(y) dy.$$

Hierbei nennen wir $\phi(xy)$ den *Kern* des Operators $T^{\binom{x}{y}}$. Hat $T^{\binom{x}{y}}$ den Kern $\phi(xy)$, so hat offenbar $T^{\binom{u}{v}}$ den Kern $\phi(uv)$. Der Kern ist dabei bereits durch den unvollständigen Operator T bestimmt, jedoch ist die Darstellung nur für die vollständigen Operatoren möglich. Der Integrationsbereich in (8) erstrecke sich stets von $-\infty$ bis $+\infty$. Etwaige andere Bereich lassen sich ja stets durch geeignete Definition von $\phi(xy)$ auf diesen Fall zurückführen (z.B. sei $\phi(xy) = 0$ ausserhalb eines bestimmten Intervalls ab). Für die Kerne $\phi(xy)$ setzen wir nur voraus, dass sie im Unendlichen genügend stark verschwinden, damit die Integrale (8) sinnvoll sind. Um den Operator, der zu einem bestimmten Kern gehört, zu kennzeichnen, schreiben wir auch, wenn erforderlich, $T_\phi^{\binom{x}{y}}$, und ebenso bezeichnen wir den zu einem bestimmten Operator gehörigen Kern mit ϕ_T.

Um unbeschränkt mit den Integraloperatoren operieren zu können, wollen wir ihren Kreis dadurch erweitern, dass wir auch uneigentliche Funktionen als Kerne zulassen. So können wir den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ formal als Integralop-

vious expressions regarding their arithmetic

$$\begin{aligned} \overline{T^{\binom{x}{y}}} &= \overline{T}^{\binom{x}{y}}, \\ T^{\binom{x}{y}} + S^{\binom{x}{y}} &= (T+S)^{\binom{x}{y}}, \\ cT^{\binom{x}{y}} &= (cT)^{\binom{x}{y}}, \\ T^{\binom{x}{y}} S^{\binom{y}{z}} &= (TS)^{\binom{x}{z}}, \\ (T^{\binom{x}{y}})^{-1} &= (T^{-1})^{\binom{y}{x}}, \end{aligned} \tag{7}$$

and further for functions of more variables $f(y,v)$ [7a]

$$(T^{\binom{x}{y}} + S^{\binom{u}{v}}) f(y,v) = T^{\binom{x}{y}} f(y,v) + S^{\binom{u}{v}} f(y,v).$$

With help from the complete operators, one can arrive at–which is the real reason for their introduction–an integral representation of the operators.

$$T^{\binom{x}{y}}(f(y)) = \int \phi(xy) f(y) dy. \tag{8}$$

With this we call ϕxy the *kernel* of the operator $T^{\binom{x}{y}}$. If $T^{\binom{x}{y}}$ has the kernel $\phi(xy)$, then $T^{\binom{u}{v}}$ likewise has the kernel $\phi(uv)$. The kernel is thereby already fixed through the complete operator T; however the representation is possible only for complete operators. The integral area in (8) always extends from $-\infty$ to $+\infty$. Indeed with any other area, one can always get back to this case through appropriate definition for $\phi(xy)$ (e.g., let $\phi(xy) = 0$ be outside a given interval ab). For the kernels ahead, it will be sufficient that they vanish at infinity, as it is with integral (8). When necessary, we also write $T_\phi^{\binom{x}{y}}$ to indicate the operator belonging to a given kernel, and likewise we indicate the kernel belonging to an operator with ϕ_T.

In order to be able to operate in a limited way with the integral operators, we want to expand their pool to also allow imaginary functions as kernels. We can then formally represent the unity operator $\mathbb{1}$ as integral operator with the erator mit Hilfe eines von Dirac eingeführten Symbols $\delta(x-y)$ darstellen. Wir definieren

$$\mathbb{1}^{\binom{x}{y}} \cdots = \int \delta(x-y) \ldots dy = \int \delta(y-x) \ldots dy,$$

d.h.

$$\mathbb{1}^{\binom{x}{y}} f(y) = f(x) = \int \delta(x-y) f(y) dy = \int \delta(y-x) f(y) dy.$$

$\delta(x-y)$ ist zwar keine gewöhnliche Funktion, lässt sich aber als Limes einer Reihe von Funktionen von $u = x-y$ auffassen, die an der Stelle $u = 0$ ein Maximum haben, das in der Grenze unendlich scharf und hoch wird, dessen Integral jedoch endlich $= \mathbb{1}$ bleibt. Dieses Verhalten kann man auch dadurch beschreiben, dass man verlangt: Für jedes Intervall ab, $(a < b)$ sei

$$\int_a^b \delta(u) du = \begin{cases} 0, \text{ wenn } 0 \text{ nicht in } ab \text{ liegt}, \\ \frac{1}{2}, \text{ wenn } 0 \text{ am Rande von } ab \text{ liegt}, \\ 1, \text{ wenn } 0 \text{ im Intervall } ab \text{ liegt}. \end{cases}$$

Man kann dann $\delta(x-y)$ formal wie eine Funktion zweier Argumente y und x auffassen, die jedoch nur in der Verbindung $u = x-y$ vorkommen. Dabei sei $\delta(x-y)$ gerade, also [also (10)]

$$\delta(x-y) = \delta(y-x).$$

Mit Hilfe solcher Kerne kann man im allgemeinen jeden vollständigen Operator als Integraloperator darstellen. Jedenfalls setzen wir voraus, dass diese Darstellbarkeit für alle in Betracht kommenden Operatoren möglich sei, ohne jedoch den Bereich dieser Operatorn hier genauer zu untersuchen.

Mit Hilfe der δ-Funktion lässt sich der Kern $\phi(xy)$ eines Operators durch diesen selbst ausdrücken, denn es ist

$$\overline{T}_{\phi}^{\binom{x}{y}} = T_{\overline{\phi}}^{\binom{x}{y}}, T_{\phi}^{\binom{x}{y}} + T_{\psi}^{\binom{x}{y}} = T_{\phi+\psi}^{\binom{x}{y}}, cT_{\phi}^{\binom{x}{y}} = T_{c\phi}^{\binom{x}{y}},$$

d.h. $\phi(xy)$ ist gleich dem Resultat der Anwedung der Operation $T_{\phi}^{\binom{x}{u}}$ auf $\delta(u-y)$.

Für die Integraloperatoren auch in unserem erweiterten Sinne gelten offen-

help of a symbol introduced by Dirac, $\delta(x-y)$. We define

$$\mathbb{1}^{\binom{x}{y}} \cdots = \int \delta(x-y) \ldots dy = \int \delta(y-x) \ldots dy,$$

i.e.

$$\mathbb{1}^{\binom{x}{y}} f(y) = f(x) = \int \delta(x-y) f(y) dy = \int \delta(y-x) f(y) dy. \tag{9}$$

$\delta(x-y)$ is no usual function, but can be conceived as the limit of functions of $u = x-y$ which achieve their maximum at the point $u = 0$, that becomes in the limit infinitely sharp and high, whose integral nevertheless remains $= \mathbb{1}$. One can also describe this behavior as requiring: for each interval ab, $(a < b)$

$$\int_a^b \delta(u) du = \begin{cases} 0, \text{ if } 0 \text{ does not lie in } ab, \\ \frac{1}{2}, \text{ if } 0 \text{ lies at the boundary } ab, \\ 1, \text{ if } 0 \text{ lies in } ab. \end{cases} \tag{10}$$

One can therefore formally conceive of $\delta(x-y)$ as a function of two arguments x and y, which nevertheless occur only in the combination $u = x-y$. Thus let $\delta(x-y)$ just be

$$\delta(x-y) = \delta(y-x).$$

With help from such kernel one can in general represent every complete operator as an integral operator. In any case, we assume such representability is possible for all considered operators, but without precisely examining the extent of such operators.

With the help of the δ-function, the kernel $\phi(xy)$ of an operator may be expressed, since it is

$$\overline{T}_{\phi}^{\binom{x}{y}} = T_{\overline{\phi}}^{\binom{x}{y}}, T_{\phi}^{\binom{x}{y}} + T_{\psi}^{\binom{x}{y}} = T_{\phi+\psi}^{\binom{x}{y}}, cT_{\phi}^{\binom{x}{y}} = T_{c\phi}^{\binom{x}{y}}, \tag{11}$$

i.e., $\phi(xy)$ is equal to the result of the application of the operation $T^{\binom{x}{y}}$ to $\delta(u-y)$.

The following obvious rules of calculation also obtain for the integral opsichtlich folgende Rechenregeln

$$\overline{T}_{\phi}^{\binom{x}{y}}=T_{\overline{\phi}}^{\binom{x}{y}},T_{\phi}^{\binom{x}{y}}+T_{\psi}^{\binom{x}{y}}=T_{\phi+\psi}^{\binom{x}{y}},cT_{\phi}^{\binom{x}{y}}=T_{c\phi}^{\binom{x}{y}}.$$

Sodann betrachten wir die Multiplikation von Operatoren. Wir haben nach Definition

$$\begin{aligned}T_{\phi}^{\binom{x}{y}}T_{\psi}^{\binom{y}{z}}f(z)&=\int\phi(xy)\{\int\psi(yz)f(z)dz\}dy\\&=\int\int\phi(xy)\psi(yz)f(z)dydz\\&=\int\{\int\phi(xy)\psi(yz)dy\}f(z)dz,\end{aligned}$$

d.h. das Produkt zweier Integraloperatoren wird wieder ein Integraloperator [(13a)]

$$T_{\phi}^{\binom{x}{y}}T_{\psi}^{\binom{y}{z}}=T_{\chi}^{\binom{x}{z}}$$

mit dem neuen Kern [(13b)]

$$\chi(xz)=\int\phi(xy)\psi(yz)dy.$$

Schliesslich bilden wir noch den Kern des zu $T_{\phi}^{\binom{x}{y}}$ reziproken Operators

$$(T_{\phi}^{\binom{x}{y}})^{-1}=(T_{\phi}^{-1})^{\binom{y}{x}},$$

den wir mit ϕ^{-1} bezeichnen wollen, es sei also

$$(T_{\phi}^{-1})^{\binom{y}{x}}=T_{\phi^{-1}}^{\binom{y}{x}}.$$

Da nach Definition

$$T_{\phi}^{\binom{x}{u}}(T_{\phi}^{-1})^{\binom{u}{y}}=(T_{\phi}^{-1})^{\binom{x}{u}}T_{\phi}^{\binom{u}{y}}=\mathbb{1}^{\binom{x}{y}}$$

sein soll, so gilt nach der Kompositionsregel (13b)

$$\int\phi(xu)\phi^{-1}(uy)du=\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=\delta(x-y),$$

die wir als Orthogonalitätsrelation bezeichnen.

Wir leiten jetzt für die Kerne der Operatoren weitere Funktionalgleichun-

erators in our expanded sense

$$\overline{T}_{\phi}^{\binom{x}{y}}=T_{\overline{\phi}}^{\binom{x}{y}},T_{\phi}^{\binom{x}{y}}+T_{\psi}^{\binom{x}{y}}=T_{\phi+\psi}^{\binom{x}{y}},cT_{\phi}^{\binom{x}{y}}=T_{c\phi}^{\binom{x}{y}}. \tag{12}$$

We subsequently examine the multiplication of operators. We have by definition

$$\begin{aligned}T_{\phi}^{\binom{x}{y}}T_{\psi}^{\binom{y}{z}}f(z)&=\int\phi(xy)\{\int\psi(yz)f(z)dz\}dy\\&=\int\int\phi(xy)\psi(yz)f(z)dydz\\&=\int\{\int\phi(xy)\psi(yz)dy\}f(z)dz,\end{aligned}$$

i.e., the product of two integral operators is again an integral operator

$$T_{\phi}^{\binom{x}{y}}T_{\psi}^{\binom{y}{z}}=T_{\chi}^{\binom{x}{z}} \tag{13}$$

with the new kernel

$$\chi(xz)=\int\phi(xy)\psi(yz)dy.$$

Finally we construct the kernel of the operator reciprocal to $T_{\phi}^{\binom{x}{y}}$

$$(T_{\phi}^{\binom{x}{y}})^{-1}=(T_{\phi}^{-1})^{\binom{y}{x}},$$

which we will denote with ϕ^{-1}, hence it is

$$(T_{\phi}^{-1})^{\binom{y}{x}}=T_{\phi^{-1}}^{\binom{y}{x}}. \tag{14}$$

Thus by definition it must be that

$$T_{\phi}^{\binom{x}{u}}(T_{\phi}^{-1})^{\binom{u}{y}}=(T_{\phi}^{-1})^{\binom{x}{u}}T_{\phi}^{\binom{u}{y}}=\mathbb{1}^{\binom{x}{y}},$$

then applied according to the composition rule (13b)

$$\int\phi(xu)\phi^{-1}(uy)du=\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=\delta(x-y), \tag{15}$$

which we designate the orthogonality relation.

We are now led to additional functional equations for the kernel of opgen ab. Zunächst gelten für den Kern des Einheitsoperators die Gleichungen

$$(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\delta(x-y)=0 \qquad (\epsilon=\frac{h}{2\pi i}),$$
$$(x-y)\delta(x-y)=0.$$

Die erste besagt nämlich, dass δ nur von der Differenz $(x-y)$ abhängt, und die zweite, dass überall, wo $(x-y)\neq 0$ ist, δ verschwinden muss. Dabei ist ϵ eine Konstante, die wir eingeführt haben, um später den Anschluss an die Quantenmechanik zu gewinnen. Sie ist dann gleich $\frac{h}{2\pi i}$ (h = Plancksche Konstante) zu nehmen, wird also rein imaginär. Durch die Gleichungen (16) wird $\delta(x-y)$ andererseits auch bis auf einen konstanten Faktor festgelegt.

Für die Kerne ϕ^{-1} der reziproken Operatoren erhalten wir nach (15) und (16) folgende Funktionalgleichungen

$$(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0,$$
$$(x-y)\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0,$$

die wir auch als Definition für ϕ^{-1} benutzen können.

Aus (16a) und (16b) können wir nun durch Anwendung der Operation T_ϕ Funktionalgleichungen für ϕ herleiten. Zunächst gelten offenbar die Beziehungen

$$T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\delta(x-y)=0,$$
$$T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})T_{\phi^{-1}}^{\binom{x}{x}}T_\phi^{\binom{x}{x}}\delta(x-y)=0.$$

Nun ist nach (11)

$$T_\phi^{\binom{x}{x}}\delta(x-y)=T_\phi^{\binom{x}{u}}\delta(u-y)=\phi(xy).$$

erators. First, applied to the kernel of the identity operator, the equation

$$(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\delta(x-y)=0 \qquad (\epsilon=\frac{h}{2\pi i}), \tag{16a}$$
$$(x-y)\delta(x-y)=0. \tag{16b}$$

The first one says namely that δ depends only on the difference $(x-y)$, and the second that in general, where $(x-y)\neq 0$, δ must vanish. There ϵ is a constant, which has been introduced in order to later produce a better connection to quantum mechanics. It is in that case the same to take $\frac{h}{2\pi i}$ (h = Planck's constant), so is therefore purely imaginary. On the other hand, through equations (16) $\delta(x-y)$ is also fixed up to a constant factor.

By (15) and (16) we get the following equations for the kernel ϕ^{-1} of the reciprocal operators

$$(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0, \tag{17a}$$
$$(x-y)\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0, \tag{17b}$$

which we can also use as the definition for ϕ^{-1}.

From (16a) and (16b) we can now introduce functional equations for ϕ through application of the operation T_ϕ. First, the relations obviously hold

$$\left.\begin{aligned}&T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\delta(x-y)=0,\\&T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})T_{\phi^{-1}}^{\binom{x}{x}}T_\phi^{\binom{x}{x}}\delta(x-y)=0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Now by (11)

$$T_\phi^{\binom{x}{x}}\delta(x-y)=T_\phi^{\binom{x}{u}}\delta(u-y)=\phi(xy).$$

So we get from (18), since $T_\phi^{\binom{x}{x}}$ only acts on the variable x and not on y, and

Also erhalten wir aus (18), da $T_\phi^{\binom{x}{x}}$ nur auf die Variable x und nicht auf y wirkt, und daher mit $\epsilon\frac{\partial}{\partial y}$ vertauschbar ist, [19a]

$$\{T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x})T_\phi^{-1\binom{x}{x}} + \epsilon\frac{\partial}{\partial y}\}\phi(xy) = 0.$$

Ebenso ergibt sich aus (16b) die Gleichung [19b]

$$\{T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x})T_\phi^{-1\binom{x}{x}} - y\}\phi(xy) = 0.$$

Wir führen noch die Bezeichnungen

$$F^{\binom{x}{x}} = T_\phi^{\binom{x}{x}} x T_\phi^{-1\binom{x}{x}} \equiv T_\phi^{\binom{x}{u}} u T_\phi^{-1\binom{u}{x}},$$

$$G^{\binom{x}{x}} = T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x})T_\phi^{-1\binom{x}{x}} \equiv T_\phi^{\binom{x}{u}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial u})T_\phi^{-1\binom{u}{x}},$$

ein. Die letzte Umformung dient dazu, $T_\phi^{\binom{x}{u}}$, $T_\phi^{-1\binom{u}{x}}$ durch ihre Kerne ausdrücken zu können, wozu ein Wechsel der Variablen nötig ist. Mit (20) schreiben sich also die Funktionalgleichungen (19)

$$(F^{\binom{x}{x}} - y)\phi(xy) = 0,$$

$$(G^{\binom{x}{x}} + \epsilon\frac{\partial}{\partial y})\phi(xy) = 0.$$

therefore is interchangeable with $\epsilon\frac{\partial}{\partial y}$ [19a]

$$\{T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x})T_\phi^{-1\binom{x}{x}} + \epsilon\frac{\partial}{\partial y}\}\phi(xy) = 0. \tag{19}$$

Likewise this yields through (16b) the equations (19b)

$$\{T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x})T_\phi^{-1\binom{x}{x}} - y\}\phi(xy) = 0.$$

We further introduce the equations

$$F^{\binom{x}{x}} = T_\phi^{\binom{x}{x}} x T_\phi^{-1\binom{x}{x}} \equiv T_\phi^{\binom{x}{u}} u T_\phi^{-1\binom{u}{x}}, \tag{20a}$$

$$G^{\binom{x}{x}} = T_\phi^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x})T_\phi^{-1\binom{x}{x}} \equiv T_\phi^{\binom{x}{u}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial u})T_\phi^{-1\binom{u}{x}}, \tag{20b}$$

The last transformation serves to be able to express $T_\phi^{\binom{x}{u}}$, $T_\phi^{-1\binom{u}{x}}$ through their kernels, whereby an exchange of variables is necessary. With (20) therefore correspond the functional equations (19)

$$(F^{\binom{x}{x}} - y)\phi(xy) = 0, \tag{21a}$$

$$(G^{\binom{x}{x}} + \epsilon\frac{\partial}{\partial y})\phi(xy) = 0. \tag{21b}$$

1 E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79 (1926), S. 734. Dass sich die Matrizen als ein Spezialfall linearer Operatoren affassen lassen, wurde zuerst von M. Born und N. Wiener, Zeitschr. f. Phys. 36 (1926) S. 174, erkannt.

4 Canonical operators and transformations

Wir führen jetzt weiter zwei spezielle Grundoperatoren q und p ein, nämlich

$$qf(x) = xf(x),$$

$$pf(x) = \epsilon\frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

We now further introduce two special basic operators q and p, namely

$$qf(x) = xf(x), \tag{22a}$$

$$pf(x) = \epsilon\frac{\partial f(x)}{\partial x}. \tag{22b}$$

Für $p^{\binom{x}{x}}$ und $q^{\binom{x}{x}}$ werden wir, wenn kein Missverständnis zu befürchten ist, auch einfach $\epsilon\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. x selbst schreiben. Mittels q und p kann man weiter allgemeinere Operatoren aufbauen, indem man in einer Funktion $F(pq)$, die als Potenzreihe in p zu denken ist, eben q durch x und p durch $\epsilon\frac{\partial}{\partial x}$ ersetzt und das ganze wieder als Operator, der auf Funktionen von x anzuwenden ist, auffasst. Bei solchen Operatorfunktionen kommt es natürlich wesentlich auf die Reihenfolge der Faktoren an. Wir wollen übrigens annehmen, dass sich alle vorkommenden Operatoren als solche Operatorfunktionen aus q und p aufbauen lassen.

Auch diese Operatoren lassen sich alle mit Hilfe von uneigentlichen Kernen als Integraloperatoren darstellen (siehe besonders Dirac loc. cit., der den hierzu nötigen Formalismus konsequent durchführt). Die zu q und p selbst gehörigen Kerne sind dabei [23a] $x\delta(x-y)$ bzw. [23b] $\epsilon\delta'(x-y)$, wo $\delta'(u)$ als Limes der Ableitungen nach u von denjenigen Funktionen zu denken ist, die selbst $\delta(u)$ zum Limes haben. Man kann dann δ' formal so behandeln, als ob es eine richtige Ableitung von δ wäre. Mit der obigen Definition hat man in der Tat

$$\int x\delta(x-y)f(y)dy = xf(x) = qf(x),$$

$$\int \epsilon\delta'(x-y)f(y)dy = -\epsilon f(y)\delta(x-y)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \epsilon\int \delta(x-y)f'(y)dy = \epsilon\frac{\partial f(x)}{\partial x} = pf(x).$$

Nach (20) können wir die Operatoren F und G als das Resultat einer Transformation der Grundoperatoren p und q der Form

$$A = TaT^{-1}$$

auffassen, die wir eine *kanonische Transformation* des Operators a nennen.

For $p^{\binom{x}{x}}$ and $q^{\binom{x}{x}}$, when no misunderstanding is to be feared, we will also write $\epsilon\frac{\partial}{\partial x}$ and x, respectively. By means of q and p one can further construct more general operators, while one interprets in a function $F(pq)$, which is to be thought of as a power series of p, just replace q by x and p by $\epsilon\frac{\partial}{\partial x}$ and the whole again as an operator, which is to apply to functions of x. Of course, such operator functions are essentially dependent on the order of the factors. Incidentally, we will assume that all occurring operators can be constructed as such operator functions of q and p.

Also, these operators make it possible to represent everything as integral operators with the help of the improper kernels. The kernels belonging to q and p themselves are thereby

$$x\delta(x-y)\text{bzw.} \tag{23a}$$

$$\epsilon\delta'(x-y), \tag{23b}$$

where $\delta'(u)$ is to be thought of as the limit of the derivatives with respect to u of those functions, which themselves have $\delta(u)$ at the limit. One can therefore formally treat δ' as if it were a proper derivative of δ. With the above definition one thus has

$$\int x\delta(x-y)f(y)dy = xf(x) = qf(x),$$

$$\int \epsilon\delta'(x-y)f(y)dy = -\epsilon f(y)\delta(x-y)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \epsilon\int \delta(x-y)f'(y)dy = \epsilon\frac{\partial f(x)}{\partial x} = pf(x).$$

By (20) we can conceive of the operators F and G as the results of a transformation of the basic operators p and q of the form

$$A = TaT^{-1}, \tag{24}$$

which we call a *canonical transformation* of the operator a. The operators p

Die Operatoren p und q haben nun folgende sie auszeichnende Eigenschaft. Es ist

$$(pq - qp) = \epsilon \mathbb{1},$$

denn wir haben

$$(\epsilon \frac{\partial}{\partial x} x - x\epsilon \frac{\partial}{\partial x}) f(x) = \epsilon \frac{\partial}{\partial x}(xf(x)) - x\epsilon \frac{\partial}{\partial x}(f(x)) = \epsilon f(x) = \epsilon \mathbb{1} f(x).$$

Aus (20) und (25) folgt nun weiter, dass auch für F und G die entsprechende Relation

$$GF - FG = \epsilon \mathbb{1}$$

gilt, denn wir haben der Reihe nach

$$GF - FG = TpT^{-1}TqT^{-1} - TqT^{-1}TpT^{-1} = T(pq - qp)T^{-1} = T\epsilon \mathbb{1} T^{-1} = \epsilon \mathbb{1},$$

da $\mathbb{1}$ mit allen anderen Operatoren vertauschbar ist. Zwei Operatoren, die der Relation (26) genügen, nennen wir zueinander *kanonische konjugiert*. Aus der eben durchgeführten Überlegung folgt dann sofort, dass die Eigenschaft zweier Operatoren, zueinander kanonisch konjugiert zu sein, invariant ist, gegen kanonische Transformationen.

Wir wollen annehmen, dass jeder Operator F sich durch eine kanonische Transformation aus dem Grundoperator q erzeugen lässt. Diese Aussage lässt sich auch so ausdrücken, dass bei gegebenem F die Operatorgleichung

$$TqT^{-1} = F$$

lösbar sein soll.

Die Bedingungen, die F erfüllen muss, damit dies möglich ist, wollen wir hier nicht untersuchen.

Umgekehrt ist aber T durch diese Forderung noch nicht eindeutig bestimmt. Nehmen wir an, wir hätten zwei verschiedene Lösungen T und S

and q now have the following distinguishing property. It is

$$(pq - qp) = \epsilon \mathbb{1}, \tag{25}$$

thus we have

$$(\epsilon \frac{\partial}{\partial x} x - x\epsilon \frac{\partial}{\partial x}) f(x) = \epsilon \frac{\partial}{\partial x}(xf(x)) - x\epsilon \frac{\partial}{\partial x}(f(x)) = \epsilon f(x) = \epsilon \mathbb{1} f(x).$$

It likewise follows from (20) and (25) that the corresponding relation also holds of F and G

$$GF - FG = \epsilon \mathbb{1} \tag{26}$$

because we have in turn

$$GF - FG = TpT^{-1}TqT^{-1} - TqT^{-1}TpT^{-1} = T(pq - qp)T^{-1} = T\epsilon \mathbb{1} T^{-1} = \epsilon \mathbb{1},$$

since $\mathbb{1}$ is exchangeable with all other operators. We call two operators satisfying the relation (26) *canonically conjugate* to one another. From similarly introduced considerations it follows immediately that the property of two operators being canonically conjugate to one another is invariant under canonical transformations.

We wish to assume that each operator F can be generated through a canonical transformation of the basic operator q. This assertion can also be expressed as for any given F, the operator equation

$$TqT^{-1} = F \tag{27}$$

is solvable.

We will not here examine the conditions which F must satisfy for this to be possible.

Conversely, however, T is not yet uniquely determined by this requirement. Suppose we had found two distinct solutions T and S. Then

$$TqT^{-1} = F, \qquad SqS^{-1} = F,$$

gefunden. Es sei also

$$TqT^{-1} = F, \qquad SqS^{-1} = F,$$

so folgt daraus

$$T^{-1}Sq = qT^{-1}S,$$

d.h. $T^{-1}S$ muss mit q vertauschbar sein, also

$$S = Ts,$$

wo s ein Operator ist, der mit q vertauschbar ist. Es lässt sich beweisen, dass ein solcher Operator sich als Operatorfunktion von q allein darstellen lässt: $s = s(q)$, so dass also

$$s(q)f(x) = s(x)f(x)$$

wird. Die allgemeine Lösung T, dass man diese rechts mit allen Funktionen von q allein multipliziert.

Stellen wir nun die Operatoren T und S in der Integralform $T^{\binom{x}{u}}{}_{\phi}$ bzw. $S^{\binom{x}{u}}{}_{\psi}$ dar, so lässt sich der Kern ψ von S aus ϕ und $s(q)$ wie folgt berechnen. Es ist nach (11) und (8) [30a]

$$\begin{aligned}\psi(xy) &= (Ts(q))^{\binom{x}{u}}\delta(u-y) = T^{\binom{x}{u}}(s(q)^{\binom{u}{u}}\delta(u-y)) \\ &= T^{\binom{x}{u}}(s(u)\delta(u-y)) = \int \phi(xu)s(u)\delta(u-y)du \\ &= \phi(xy)s(y).\end{aligned}$$

Der Kern ψ^{-1} des reziproken Operators S^{-1} bestimmt sich nach demselben Verfahren unter Beachtung der Relation (6) zu [30b]

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(yx) &= (Ts(q))^{-1\binom{y}{v}}\delta(x-v) \\ &= (s(q)^{-1})^{\binom{y}{y}}(T^{-1\binom{y}{v}}\delta(x-v)) \\ &= s^{-1}(y)(T^{-1\binom{y}{v}}\delta(x-v)) = s^{-1}(y)\phi^{-1}(yx).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\psi(xy)\psi^{-1}(yx) = \phi(xy)\phi^{-1}(yx)$$

Das Produkt des Kernes mit dem reziproken Kern ist also durch Angabe von F eindeutig bestimmt.

so it follows

$$T^{-1}Sq = qT^{-1}S,$$

i.e., T^{-1} must be interchangeable with q, so then

$$S = Ts, \tag{28}$$

where s is an operator which is exchangeable with q. This allows us to prove that such an operator can be represented as an operator function of q alone: $s = s(q)$, thus it is that

$$s(q)f(x) = s(x)f(x). \tag{29}$$

For the general solution T, one multiplies this with all functions of just q on the right.

Now if we represent the operators T and S in the form of integral form $T^{\binom{x}{u}}{}_{\phi}$ resp. $S^{\binom{x}{u}}{}_{\psi}$, this allows us to calculate the kernels ψ of S and ϕ of T as follows. By (11) and (8) [30a]

$$\begin{aligned}\psi(xy) &= (Ts(q))^{\binom{x}{u}}\delta(u-y) = T^{\binom{x}{u}}(s(q)^{\binom{u}{u}}\delta(u-y)) \\ &= T^{\binom{x}{u}}(s(u)\delta(u-y)) = \int \phi(xu)s(u)\delta(u-y)du \\ &= \phi(xy)s(y).\end{aligned} \tag{30}$$

According to the same procedure, attending to relation (6), the kernel ψ^{-1} of the reciprocal operator S^{-1} is determined [30b]

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(yx) &= (Ts(q))^{-1\binom{y}{v}}\delta(x-v) \\ &= (s(q)^{-1})^{\binom{y}{y}}(T^{-1\binom{y}{v}}\delta(x-v)) \\ &= s^{-1}(y)(T^{-1\binom{y}{v}}\delta(x-v)) = s^{-1}(y)\phi^{-1}(yx).\end{aligned}$$

From here it follows that

$$\psi(xy)\psi^{-1}(yx) = \phi(xy)\phi^{-1}(yx). \tag{31}$$

Thus the product of the kernel with the reciprocal kernel is clearly determined by the designation of F.

5 Physical interpretation of the operator calculus

Wir sind jetzt in der Lage, die eigentlichen Behauptungen unserer Theorie aufzustellen. Diese gehen dahin, dass die eben entwickelte Operatorrechnung bereits der gesuchte analytische Formalismus ist, der unseren Wahrscheinlichkeitsbehauptungen zugeordnet ist, und zwar vollzieht sich diese Zuordnung folgendermassen.

Wir ordnen jeder mechanischen Grösse einen Operator zu, und zwar in genau derselben Weise wie Schrödinger. Nämlich zunächst zu einem in der klassischen Mechanik kanonisch konjugierten Variablenpaare q und p unsere Grundoperatoren

$$pf(x) = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} f(x), \qquad qf(x) = xf(x) \qquad (\epsilon = \frac{h}{2\pi i}),$$

wo ϵ die rein imaginäre Konstante $\frac{h}{2\pi i}$ ist. Zu einer Funktion $F(pq)$, die als Potenzreihe in p gedacht sei, wird dann entsprechend der Operator zugeordnet, der durch Einsetzen dieser Grundoperatoren in $F(pq)$ entsteht. Diese Zuordnung ist hier natürlich nicht eindeutig, da die Reihenfolge der Faktoren bei den Operatoren wesentlich ist. Diese Mehrdeutigkeit wird im wesentlichen, wie wir in §8 sehen werden, dadurch beseitigt, dass man die Realität der entspringenden Wahrscheinlichkeiten fordert. Von den dortigen Ergebnissen nehmen wir das Resultat voraus, dass jeder mechanischen Grösse ein solcher Operator zugeordnet werden kann, so dass die gleich zu definierenden Wahrscheinlichkeiten reell werden.

Die Operatorfunktionen, die wir nach der obigen Festsetzung den mechanischen Grössen zuordnen, sind nun gerade die, welche wir in §4 untersuchten. Wir geben in Übereinstimmung mit unseren Forderungen eine physikalische Interpretation der Operatorrechnung, indem wir behaupten:

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\phi(xy; qF)$ zwischen der Koordinate q und einer beliebigen mechanischen Grösse $F(pq)$—d.h. dafür, dass bei gegebenem Werte y von F die Koordinate zwischen x und $x + dx$ liegt—wird durch den Kerne des Integraloperators geliefert, der den Operator q kanonisch in den zu der mechanischen Grösse $F(pq)$ zugeordneten Operator transformiert.

Wir schliessen gleich die Definition der Wahrscheinlichkeitsamplitude für zwei beliebige mechanische Grössen $F_1(pq)$ und $F_2(pq)$ an. *Seien T_1 und T_2 die Operatoren, die den Operator q kanonisch in die zu F_1 bzw. F_2 zugeordneten Operatorfunktionen transformieren, also*

$$T_1 q T_1^{-1} = F_1, \qquad T_2 q T_2^{-1} = F_2,$$

We are now in the situation to put forward the proper statements of our theory. These go that the just developed operator calculus is already the desired formalism that is associated with our probability statements, and in fact itself enforces these assignments.

We assign an operator to each mechanical quantity, and in fact in exactly the same way as Schrödinger. Namely, our basic operators are first assigned to a pair of variables p and q that are canonically conjugate in classical mechanics

$$pf(x) = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} f(x), \qquad qf(x) = xf(x) \qquad (\epsilon = \frac{h}{2\pi i}), \tag{32}$$

where ϵ is the purely imaginary constant $\frac{h}{2\pi i}$. To a function $F(pq)$, which is to be thought of as power series of p, thus will be assigned the corresponding operator that is created through the use of the basic operators in $F(pq)$. This assignment is not naturally clear as to what ordering of factors is essential to the operators. This ambiguity in the essentials, as we will see in §8, one will remove by demanding that the arising probabilities are real. By the results given there, we will assume the outcome that such an operator can be assigned to each quantity so that the same probabilities to be defined will be real.

The operator functions that we assign to the mechanical quantities by the above convention are just those we examined in §4. We give a physical interpretation of the operator calculus in agreement with our requirements by asserting:

The probability amplitude $\phi(xy; qF)$ between the coordinate q and any mechanical quantity $F(pq)$—i.e., that, given a value y of F, the coordinate lies between x and $x + dx$—is delivered through the kernel of the integral operator, which canonically transforms the operator q into the operator assigned to the mechanical quantity $F(pq)$.

We similarly connect the definition of the probability amplitude for any two given mechanical quantities $F_1(pq)$ and $F_2(pq)$. *Let T_1 and T_2 be the respective operators that transform the canonical operator q into the operator functions assigned to F_1 and F_2, so*

$$T_1 q T_1^{-1} = F_1, \qquad T_2 q T_2^{-1} = F_2,$$

so ist $\phi(xy; F_1F_2)$ gleich dem Kern des Operators

$$T = T_1^{-1}T_2.$$

Diese zweite Definition enthält natürlich die erste als Spezialfall, indem wir $F = F_2$ und $q = F_1$ setzen. Wir können dann $T_1 = \mathbb{1}$ nehmen und erhalten dann

$$T = T_1^{-1}T_2 = \mathbb{1}T_2 = T_2.$$

Es sei aber besonders darauf hingewiesen, dass T in (33) nicht etwa ein Operator ist, der F_1 kanonische in F_2 überführt. Dies wird vielmehr durch $T_2T_1^{-1}$ geleistet, da in der Tat

$$T_2T_1^{-1}F_1(T_2T_1^{-1})^{-1} = T_2(T_1^{-1}F_1T_1)T_2^{-1} = T_2qT_2^{-1} = F_2$$

ist. Die Gültigkeit von (33) wird aber durch die Forderungen IV (Kompositionsgesetz) und VI (Unabhängigkeit vom Koordinatensystem) erzwungen.

Was uns jetzt noch zu tun übrigleibt, ist einerseits zu zeigen, dass die so definierten Wahrscheinlichkeiten unsere Forderungen erfüllen, und andererseits noch einige spezielle Fälle genauer zu diskutieren und damit einige physikalische Folgerungen zu gewinnen.

Aus den Wahrscheinlichkeitsamplituden ϕ erhält man die Wahrscheinlichkeiten w selbst durch Multiplikation mit der reziproken Grösse ϕ^{-1}[1]

$$w(xy; F_1F_2) = \phi(xy; F_1F_2)\phi^{-1}(yx; F_2F_1),$$

wobei ϕ und ϕ^{-1} der Orthogonalitätsrelation (siehe (15))

$$\int \phi(xy; F_1F_2)\phi^{-1}(yz; F_2F_1)dy = \delta(x - z)$$

genügen.

Nach §4 ist $w(xy; qF)$ unabhängig von der noch vorhandenen Willkür von T. Dasselbe gilt, wie natürlich zu fordern ist, auch von $w(xy; F_1F_2)$, wie man folgendermassen nachweist. Nach (28) können T_1 und T_2 höchstens durch $T_1s_1(q)$, $T_2s_2(q)$ ersetzt werden, wo s_1 und s_2 Operatorfunktionen von q allein sind, also $T = T_1^{-1}T_2$ durch

$$S = s_1^{-1}(q)T_1^{-1}T_2s_2(q) = s_1^{-1}(q)Ts_2(q),$$

und $T^{-1} = T_2^{-1}T_1$ durch

$$S^{-1} = s_2^{-1}(q)T^{-1}s_1(q).$$

then $\phi(xy; F_1F_2)$ is equal to the kernel of the operators

$$T = T_1^{-1}T_2. \qquad (33)$$

This second definition naturally includes the first as a special case, wherein we set $F = F_2$ and $q = F_1$. We can thus take $T_1 = \mathbb{1}$ and thereby obtain

$$T = T_1^{-1}T_2 = \mathbb{1}T_2 = T_2.$$

However, it should especially be noted that T in (33) is not an operator that canonically converts F_1 to F_2. This will instead be done by $T_2T_1^{-1}$, since it is, in fact,

$$T_2T_1^{-1}F_1(T_2T_1^{-1})^{-1} = T_2(T_1^{-1}F_1T_1)T_2^{-1} = T_2qT_2^{-1} = F_2$$

The validity of (33) is rather forced by requirement IV (law of composition) and VI (independence from the coordinate system).

What remains for us to do is on the one hand to show that the so-defined probabilities meet our requirements, and on the other to discuss some special cases in detail and to extract from them some physical conclusions.

One gets the probabilities w themselves from the probability amplitude ϕ through multiplication with the reciprocal quantity ϕ^{-1}

$$w(xy; F_1F_2) = \phi(xy; F_1F_2)\phi^{-1}(yx; F_2F_1), \qquad (34)$$

wherein ϕ and ϕ^{-1} satisfy the orthogonality relation (see (15))

$$\int \phi(xy; F_1F_2)\phi^{-1}(yz; F_2F_1)dy = \delta(x - z). \qquad (35)$$

By §4, $w(xy; qF)$ is independent of the remaining arbitrariness of T. The same thing applies, as is natural to demand, also of $w(xy; F_1F_2)$, as one can prove in the following way. By (28) T_1 and T_2 can at most be replaced by $T_1s_1(q)$, $T_2s_2(q)$, where s_1 and s_2 are operator functions only of q, hence $T = T_1^{-1}T_2$ by

$$S = s_1^{-1}(q)T_1^{-1}T_2s_2(q) = s_1^{-1}(q)Ts_2(q),$$

and $T^{-1} = T_2^{-1}T_1$ by

$$S^{-1} = s_2^{-1}(q)T^{-1}s_1(q).$$

Bei dieser Erweiterung wird der Kern ϕ_S von S nach (11)

$$\begin{aligned}\phi_S &= s_1^{-1}(q) T s_2(q)^{\binom{x}{u}} \delta(u-y)\\ &= (s_1^{-1}(q))^{\binom{x}{x}} T^{\binom{x}{u}} s_2(q)^{\binom{u}{u}} \delta(u-y)\\ &= s_1^{-1}(x) \int \phi_T(xu) s_2(u) \delta(u-y) du\\ &= s_1^{-1}(x) \phi_T(xy) s_2(y),\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}\phi_S^{-1}(yx) &= \phi_{S^{-1}}(yx)\\ (s_2^{-1}(q) T^{-1} s_1(q))^{\binom{y}{v}} \delta(x-v) &= s_2^{-1}(y) \phi_T^{-1}(yx) s_1(x),\end{aligned}$$

d.h. bei der Produktbildung fallen s_1 und s_2 heraus. $w(xy; F_1F_2)$ ist also unabhängig von der speziellen Wahl von T_1 und T_2.

Weiter ist nun insbesondere auch das Kompositionsaxiom IV erfüllt, also

$$\begin{aligned}\phi(xz; F_1F_3) &= \int \phi(xy; F_1F_2) \phi(yz; F_2F_3) dy\\ \phi^{-1}(zx; F_3F_1) &= \int \phi^{-1}(zy; F_3F_2) \phi^{-1}(yx; F_2F_1) dy,\end{aligned}$$

denn haben wir T_1, T_2, T_3, so dass

$$F_1 = T_1 q T_1^{-1}; \qquad F_2 = T_2 q T_2^{-1}; \qquad F_3 = T_3 q T_3^{-1},$$

so wird

$$T_1^{-1} T_3 = T_1^{-1} T_2 T_2^{-1} T_3; \qquad T_3^{-1} T_1 = T_3^{-1} T_2 T_2^{-1} T_1,$$

woraus nach (33) und (13) die obige Regel ohne weiteres folgt.

Aus der Kompositionsregel ergeben sich noch folgende Beziehungen.

Nehmen wir $F_2 = F_1$, so kommt

$$\phi(xz; F_1F_3) = \int \phi(xy; F_1F_1) \phi(yz; F_1F_3) dy,$$

und da dies für alle F_1, F_3 gelten muss, so muss

$$\begin{aligned}\phi(xy; F_1F_1) &= \delta(x-y)\\ \phi^{-1}(yx; F_1F_1) &= \delta(x-y)\end{aligned}$$

sein. Das bedeutet aber: für die Wahrscheinlichkeitsbeziehung zwischen einer Grösse mit sich selbst ist ihr Wert undendlich scharf ausgezeichnet, so dass man in Übereinstimmung mit unseren Forderungen ihr wirklich einen einduetigen Wert zuordnen kann.

With this extension, the kernel ϕ_S of S becomes by (11)

$$\begin{aligned}\phi_S &= s_1^{-1}(q) T s_2(q)^{\binom{x}{u}} \delta(u-y)\\ &= (s_1^{-1}(q))^{\binom{x}{x}} T^{\binom{x}{u}} s_2(q)^{\binom{u}{u}} \delta(u-y)\\ &= s_1^{-1}(x) \int \phi_T(xu) s_2(u) \delta(u-y) du\\ &= s_1^{-1}(x) \phi_T(xy) s_2(y),\end{aligned}$$

and accordingly

$$\begin{aligned}\phi_S^{-1}(yx) &= \phi_{S^{-1}}(yx)\\ (s_2^{-1}(q) T^{-1} s_1(q))^{\binom{y}{v}} \delta(x-v) &= s_2^{-1}(y) \phi_T^{-1}(yx) s_1(x),\end{aligned}$$

i.e. s_1 and s_2 fall out of the product formation. $w(xy; F_1F_2)$ is therefore independent of the particular choice of T_1 and T_2.

Furthermore, the composition axiom IV is also now satisfied, hence

$$\phi(xz; F_1F_3) = \int \phi(xy; F_1F_2) \phi(yz; F_2F_3) dy \tag{36a}$$

$$\phi^{-1}(zx; F_3F_1) = \int \phi^{-1}(zy; F_3F_2) \phi^{-1}(yx; F_2F_1) dy, \tag{36b}$$

since we have T_1, T_2, T_3, so that

$$F_1 = T_1 q T_1^{-1}; \qquad F_2 = T_2 q T_2^{-1}; \qquad F_3 = T_3 q T_3^{-1},$$

thus it is

$$T_1^{-1} T_3 = T_1^{-1} T_2 T_2^{-1} T_3; \qquad T_3^{-1} T_1 = T_3^{-1} T_2 T_2^{-1} T_1,$$

out of which, by (33) and (13), the above rule readily follows.

The following relationships arise from the composition rule.

If we let $F_2 = F_1$, then comes

$$\phi(xz; F_1F_3) = \int \phi(xy; F_1F_1) \phi(yz; F_1F_3) dy,$$

and since this must hold for all F_1, F_3, it must be that

$$\begin{aligned}\phi(xy; F_1F_1) &= \delta(x-y)\\ \phi^{-1}(yx; F_1F_1) &= \delta(x-y).\end{aligned} \tag{37}$$

This means, however: for the probability relation between a quantity and itself, its value is infinitely sharply distinguished, so that one can genuinely assign it a unique value in accordance with our requirement.

Nehmen wir nun in der Kompositionsregel $F_3 = F_1$, so folgt jetzt

$$\int \phi(xy; F_1F_2)\phi(yz; F_2F_1)dy = \delta(x-z).$$

Nach der Orthogonalitätsrelation (35) muss also

$$\phi(yx; F_2F_1) = \phi^{-1}(yx; F_1F_2),$$
$$\phi^{-1}(xy; F_2F_1) = \phi(xy; F_1F_2)$$

sein. Damit bestätigen wir das Bestehen unserer Voraussetzung II

$$w(xy; F_1F_2) = w(yx; F_2F_1).$$

Ferner sieht man auch, dass ebenfalls die Forderung V erfüllt ist, dass die Wahrscheinlichkeitsbeziehung zweier Grössen nur von der kinematischen Natur ihres Zusammenhanges abhängt, d.h. der reinen funktionalen Abhängigkeit von p und q, da ja gar keine Bezugnahme auf weitere Eigenschaften des Systems erforderlich ist.

Endlich ist die Wahrscheinlichkeitsbeziehung invariant gegen kanonische Transformationen der Operatoren F_1 und F_2, d.h. für beliebiges S ist

$$\phi(xy; F_1F_2) = \phi(xy; (SF_1S^{-1})(SF_2S^{-1})),$$

denn bei der Transformation von F_1 und F_2 um S gehen T_1 und T_2 in ST_1 bzw. ST_2 über, so dass $T = T_1^{-1}T_2$ und $T^{-1} = T_2^{-1}T_1$ ungeändert bleiben. Dies bedeutet, dass bei einem Übergang zu einem anderen Koordinatensystem die Repräsentanten der mechanischen Grössen nach den Regeln der Quantenmechanik und nicht nach denen der gewöhnlichen Mechanik zu transformieren sind. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes ist es aber gleichgültig, welches Koordinatensystem zugrunde gelegt wird. Also ist auch die Forderung VI erfüllt.

If we now let $F_3 = F_1$ in the composition rule, then it now follows

$$\int \phi(xy; F_1F_2)\phi(yz; F_2F_1)dy = \delta(x-z).$$

By the orthogonality relation (35) it thus must be

$$\phi(yx; F_2F_1) = \phi^{-1}(yx; F_1F_2), \tag{38a}$$
$$\phi^{-1}(xy; F_2F_1) = \phi(xy; F_1F_2). \tag{38b}$$

With it we confirm the existence of our condition II

$$w(xy; F_1F_2) = w(yx; F_2F_1). \tag{39}$$

Further one also sees that the requirement V is likewise satisfied, that the probability relation of two quantities depends only on the kinematic nature of their connection, i.e. the pure functional dependence on p and q, since indeed no reference is even required to further properties of the system.

Finally, the probability relation is invariant under canonical transformations of the operators F_1 and F_2, i.e. for any S

$$\phi(xy; F_1F_2) = \phi(xy; (SF_1S^{-1})(SF_2S^{-1})), \tag{40}$$

thus T_1 and T_2 change into ST_1 and ST_2 with the transformation from F_1 and F_2 by S, such that $T = T_1^{-1}T_2$ and $T^{-1} = T_2^{-1}T_1$ remain unchanged. This means that in a transition to another coordinate system, the representations of the mechanical quantities are transformed according to the rules of quantum mechanics but not those of ordinary mechanics. In view of this fact it is indifferent which coordinate system lies at the basis. Therefore requirement VI is also satisfied.

1 Diese Definition ist nur scheinbar von der des §2 verschieden, wie in den §§6–8 gezeigt wird.

6 Realness conditions

Wir kommen jetzt zu der schon erwähnten fundamentalen Frage, welche Bedingungen F bzw. F_1 und F_2 als Operatorfunktionen erfüllen müssen, damit die resultierenden Wahrscheinlichkeiten reell und positiv werden. Nur solche Operatoren können sinnvollerweise als Repräsentanten mechanischer Grössen dienen, und wir werden so eine Bedingung für sie erhalten, die die Willkür der Zuordnung im wesentlichen beseitigt.

Die Realität ist offenbar gesichert, wenn

$$\phi^{-1}(yx; F_2F_1) = \overline{\phi}(xy; F_1F_2)$$

We come now to the already mentioned fundamental question, which conditions F or respectively F_1 and F_2 as operator functions must satisfy such that the resulting probabilities are real and positive. Only such operators can usefully serve as representations of mechanical quantities, and we will give a condition that essentially eliminates the arbitrariness of the assignment.

The realness is obviously secured if

$$\phi^{-1}(yx; F_2F_1) = \overline{\phi}(xy; F_1F_2), \tag{41}$$

ist, da dann in Übereinstimmung mit der Definition von w in §2

$$w(xy; F_1F_2) = \phi(xy; F_1F_2)\phi^{-1}(yx; F_2F_1) = |\phi(xy; F_1F_2|^2$$

wird. Nun gibt es ja nach §4 verschiedene ϕ, die zu denselben F_1, F_2 gehören. Es genügt also, dass eines von diesen die obige Bedingung erfüllt, damit w reell wird.

Wir untersuchen zunächst als ersten Schritt unter welchen Bedingungen es ein $\phi(xy; qF)$ gibt, so dass

$$\phi^{-1}(yx; Fq) = \overline{\phi}(xy; qf)$$

wird. Dabei können wir der Übersichtlichkeit halber die Argumente q und F fortlassen, da es sich um ein reines Problem der Operatorrechnung handelt. Dieses Problem ist, noch einmal formuliert, folgendes.

Es sei F ein gegebener Operator. Welche Bedingungen muss er erfüllen, damit es einen Operator T mit dem Kern $\phi(xy)$ gibt, so dass

$$TqT^{-1} = F, \text{d.h.} T^{\binom{x}{x}} x T^{-1\binom{x}{x}} = F^{\binom{x}{x}}$$

und

$$\phi^{-1}(yx) = \overline{\phi}(xy)$$

wird. Für ϕ bestehen nun die beinden Gleichungen (siehe (21))

$$(F^{\binom{u}{u}} - x)\phi(ux) = 0,$$

$$(G^{\binom{u}{u}} - \epsilon\frac{\partial}{\partial x})\phi(ux) = 0$$

wo G der zu F konjugierte Operator

$$G = TpT^{-1}, \text{d.h.} G^{\binom{x}{x}} = T^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x})T^{-1\binom{x}{x}}$$

ist.

Soll nun die Realitätsbedingung (43) erfüllt sein, so muss ϕ^{-1} den zu (44) konjigiert komplexen Differentialgleichungen

$$(\overline{F}^{\binom{u}{u}} - y)\phi^{-1}(yu) = 0,$$

$$(\overline{G}^{\binom{u}{u}} - \epsilon\frac{\partial}{\partial y})\phi^{-1}(yu) = 0$$

genügen, wobei zu beachten ist, dass ϵ rein imaginär ist. In §3 hatten wir

since this is in agreement with the definition of w in §2

$$w(xy; F_1F_2) = \phi(xy; F_1F_2)\phi^{-1}(yx; F_2F_1) = |\phi(xy; F_1F_2|^2. \tag{42}$$

Now this indeed gives various ϕ by §4, which belong to the same F_1, F_2. It therefore suffices that one of these satisfies the above condition for w to be real.

First we examine, as a first step, under which conditions we are given a $\phi(xy; qF)$ such that

$$\phi^{-1}(yx; Fq) = \overline{\phi}(xy; qf).$$

With this we can omit q and F for the sake of clarity, since it is handled as a pure problem of the operator calculus.

Let F be a given operator. Which conditions must it satisfy so that it gives an operator T with the kernel $\phi(xy)$, such that

$$TqT^{-1} = F, \text{d.h.} T^{\binom{x}{x}} x T^{-1\binom{x}{x}} = F^{\binom{x}{x}}$$

and

$$\phi^{-1}(yx) = \overline{\phi}(xy). \tag{43}$$

For ϕ there now exist the equations (see (21))

$$(F^{\binom{u}{u}} - x)\phi(ux) = 0, \tag{44a}$$

$$(G^{\binom{u}{u}} - \epsilon\frac{\partial}{\partial x})\phi(ux) = 0 \tag{44b}$$

where G is the conjugate operator to F

$$G = TpT^{-1}, \text{d.h.} G^{\binom{x}{x}} = T^{\binom{x}{x}}(\epsilon\frac{\partial}{\partial x})T^{-1\binom{x}{x}}.$$

Now should the realness condition (43) be satisfied, then ϕ^{-1} must satisfy the complex conjugates of the differential equations (44)

$$(\overline{F}^{\binom{u}{u}} - y)\phi^{-1}(yu) = 0, \tag{45a}$$

$$(\overline{G}^{\binom{u}{u}} - \epsilon\frac{\partial}{\partial y})\phi^{-1}(yu) = 0 \tag{45b}$$

where it is to be noted that ϵ is pure imaginary. In §3 we had further derived ferner für ϕ^{-1} die Funkionalgleichungen (siehe (17))

$$(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0$$
$$(x-y)\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0$$

abgeleitet. Das Bestehen der Realitätsbedingung (43) ist demnach gleichbedeutend mit der Verträglichkeit von (44), (45) und (46), und wir suchen dementsprechend die Bedingung hierfür aufzustellen.

Nun erhalten wir für die linke Seite von (46a) unter Berücksichtigung von (44) und (45)

$$\begin{aligned}&(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0\\&=\int(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\phi(ux))\phi^{-1}(yu)du+\int\phi(ux)(\epsilon\frac{\partial}{\partial y}\phi^{-1}(yu))du\\&=-\int G^{\binom{u}{u}}\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du+\int\phi(ux)\overline{G}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)du\\&=-\int\{\phi^{-1}(uy)G^{\binom{u}{u}}\phi(xu)-\phi(ux)\overline{G}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)\}du,\end{aligned}$$

und entsprechend für (46b)

$$\begin{aligned}&(x-y)\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du\\&\qquad=\int\{\phi^{-1}(yu)F^{\binom{u}{u}}\phi(ux)-\phi(ux)\overline{F}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)\}du.\end{aligned}$$

Die Bedingungen für (43) werden also

$$\int\{\phi^{-1}(yu)G^{\binom{u}{u}}\phi(ux)-\phi(ux)\overline{G}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)\}du=0.$$
$$\int\{\phi^{-1}(yu)F^{\binom{u}{u}}\phi(ux)-\phi(ux)\overline{F}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)\}du=0.$$

Sie sind jedenfalls erfüllt, wenn F und G für alle Funktionen $f(u)$ und $g(u)$

for ϕ^{-1} the functional equation (see (17))

$$(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0 \tag{46a}$$
$$(x-y)\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0 \tag{46b}$$

The existence of the realness condition (43) is therefore synonymous with the compatibility of (44), (45), and (46), and we seek to establish the condition for this accordingly.

Under consideration of (44) and (45), now we obtain for the left side of (46a)

$$\begin{aligned}&(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial}{\partial y})\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du=0\\&=\int(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\phi(ux))\phi^{-1}(yu)du+\int\phi(ux)(\epsilon\frac{\partial}{\partial y}\phi^{-1}(yu))du\\&=-\int G^{\binom{u}{u}}\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du+\int\phi(ux)\overline{G}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)du\\&=-\int\{\phi^{-1}(uy)G^{\binom{u}{u}}\phi(xu)-\phi(ux)\overline{G}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)\}du,\end{aligned}$$

and correspondingly for (46b)

$$\begin{aligned}&(x-y)\int\phi(ux)\phi^{-1}(yu)du\\&\qquad=\int\{\phi^{-1}(yu)F^{\binom{u}{u}}\phi(ux)-\phi(ux)\overline{F}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)\}du.\end{aligned}$$

The conditions for (43) therefore become

$$\int\{\phi^{-1}(yu)G^{\binom{u}{u}}\phi(ux)-\phi(ux)\overline{G}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)\}du=0. \tag{47a}$$
$$\int\{\phi^{-1}(yu)F^{\binom{u}{u}}\phi(ux)-\phi(ux)\overline{F}^{\binom{u}{u}}\phi^{-1}(yu)\}du=0. \tag{47b}$$

These are met in each case if F and G satisfy the conditions

$$\int\{g(u)F^{\binom{u}{u}}f(u)-f(u)\overline{F}^{\binom{u}{u}}g(u)\}du=0, \tag{48a}$$
$$\int\{g(u)G^{\binom{u}{u}}f(u)-f(u)\overline{G}^{\binom{u}{u}}g(u)\}du=0 \tag{48b}$$

den Bedingungen

$$\int \{g(u)F^{\binom{u}{u}}f(u) - f(u)\overline{F}^{\binom{u}{u}}g(u)\}du = 0,$$

$$\int \{g(u)G^{\binom{u}{u}}f(u) - f(u)\overline{G}^{\binom{u}{u}}g(u)\}du = 0$$

genügen.

Um nun zu untersuchen, wann F und G diesen hinreichenden Bedingungen (48) genügen—die Notwendigkeit soll gleich hernach gezeigt werden—, fragen wir zunächst, wann es zu einem festen gegebenen Operator A einen anderen Operator B gibt, so dass identisch in f und g

$$\int \{g(u)A^{\binom{u}{u}}f(u) - f(u)\overline{B}^{\binom{u}{u}}g(u)du = 0$$

wird. Zunächst ist leicht festzustellen, dass es zu gegebenem A höchstens ein solches B geben kann; denn wäre (49) für B_1 und B_2 erfüllt, so folgt, dass für alle $f(u)$ und $g(u)$

$$\int f(u)\overline{B_1 - B_2}^{\binom{u}{u}}g(u)du = 0$$

sein muss, und das ist in der Tat nur für

$$(B_1 - B_2) = 0, \quad \text{also} \quad B_1 = B_2$$

möglich.

Eine Lösung der Operatorgleichung (49) lässt sich nun sofort angeben. Sei $\phi(xy)$ der Kern von $A^{\binom{x}{y}}$, so wird

$$B^{\binom{x}{y}}f(y) = \int \overline{\phi}(yx)f(y)dy,$$

for all functions $f(u)$ and $g(u)$.

In order to now examine when F and G satisfy these sufficient conditions (48)—the necessity of which shall be shown afterward—, we first ask when to a fixed given operator A it is given another operator B such that

$$\int \{g(u)A^{\binom{u}{u}}f(u) - f(u)\overline{B}^{\binom{u}{u}}g(u)du = 0 \tag{49}$$

be identical in f and g. Firstly it is easy to determine that not more than one such operator B can be given to A; for if (49) were to be met by B_1 and B_2, then it follows that

$$\int f(u)\overline{B_1 - B_2}^{\binom{u}{u}}g(u)du = 0$$

must hold for all $f(u)$ and $g(u)$, and this is in fact possible only for

$$(B_1 - B_2) = 0, \quad \text{also} \quad B_1 = B_2.$$

A solution of the operator equation (49) can now immediately be stated. If $\phi(xy)$ be the kernel of $A^{\binom{x}{y}}$, then

$$B^{\binom{x}{y}}f(y) = \int \overline{\phi}(yx)f(y)dy, \tag{50}$$

denn in der Tat ist dann

$$\begin{aligned}
&\int \left\{ g(u) A^{\binom{u}{u}} f(u) - f(u) \overline{V}^{\binom{u}{u}} g(u) \right\} du \\
&= \int g(u) A^{\binom{u}{v}} f(v) du - \int f(u) \overline{B}^{\binom{u}{v}} g(v) du \\
&= \int g(u) \left[\int \phi(uv) f(v) dv \right] du \\
&\qquad - \int f(u) \left[\int \phi(vu) g(v) dv \right] du \\
&= \int \int \phi(uv) g(u) f(v) du dv \\
&\qquad - \int \int \phi(vu) g(v) (fu) dv du = 0.
\end{aligned}$$

Dieses B, das nach der obigen Überlegung durch (49) eindeutig bestimmt ist, bezeichnen wir mit A^+ und nenne es den zu A adjungierten Operator. Die Realitätsbedingungen (48) sind also erfüllt, wenn

$$F = F^+ \text{und} G = G^+$$

ist, also F und G zu sich selbst adjungiert sind. Solche Operatoren nennen wir auch hermitisch. Diese Bezeichnung ist dadurch begründet, dass die Bedingung $F = F^+$ für den Kern $\psi(xy)$ von F

$$\psi(xy) = \overline{\psi}(yx)$$

besagt.

Die Notwendigkeit dieser, mit (48) gleichbedeutenden Bedingung (51) ergibt sich nach P. Bernays folgendermassen:

$$\begin{aligned}
\psi(xy) = F^{\binom{x}{u}} \delta(u-y) &= T^{\binom{x}{v}} v (T^{-1})^{\binom{v}{u}} \delta(u-y) \\
&= T^{\binom{x}{v}} v \phi^{-1}(vy) \\
&= \int \phi(xv) v \phi^{-1}(vy) dv,
\end{aligned}$$

also nach (43)

$$\psi(xy) = \int \phi(xv) \overline{\phi}(yv) v dv,$$

was die Behauptung (51) in Evidenz setzt.

hence, in fact, then

$$\begin{aligned}
&\int \left\{ g(u) A^{\binom{u}{u}} f(u) - f(u) \overline{V}^{\binom{u}{u}} g(u) \right\} du \\
&= \int g(u) A^{\binom{u}{v}} f(v) du - \int f(u) \overline{B}^{\binom{u}{v}} g(v) du \\
&= \int g(u) \left[\int \phi(uv) f(v) dv \right] du \\
&\qquad - \int f(u) \left[\int \phi(vu) g(v) dv \right] du \\
&= \int \int \phi(uv) g(u) f(v) du dv \\
&\qquad - \int \int \phi(vu) g(v) (fu) dv du = 0.
\end{aligned}$$

This B, which is clearly determined by reflection on (49), we denote with A^+ and call it the operator adjoint to A. The realness conditions (48) are therefore met when

$$F = F^+ \text{und} G = G^+,$$

hence F and G are self-adjoint. We call such operators Hermitian. This equation is justified since the condition $F = F^+$ implies

$$\psi(xy) = \overline{\psi}(yx) \tag{51}$$

for the kernel $psi(xy)$ of F.

Following Bernays, the necessity of (48) (equivalently, (51)) results as follows:

$$\begin{aligned}
\psi(xy) = F^{\binom{x}{u}} \delta(u-y) &= T^{\binom{x}{v}} v (T^{-1})^{\binom{v}{u}} \delta(u-y) \\
&= T^{\binom{x}{v}} v \phi^{-1}(vy) \\
&= \int \phi(xv) v \phi^{-1}(vy) dv,
\end{aligned}$$

hence by (43)

$$\psi(xy) = \int \phi(xv) \overline{\phi}(yv) v dv,$$

which is asserted by (51).

7 Properties of Hermitian operators

Es seien einige weitere Eigenschaften der Operation $^+$ untersucht. Es seien $A^{\binom{x}{y}}$, $B^{\binom{x}{y}}$ zwei beliebige (also nicht selbstadjungierte) Operatoren mit den Kernen $\phi(xy)$ bzw. $\psi(xy)$. Nun hat $A^{+\binom{x}{y}}$ den Kern $\overline{\phi}(yx)$, $A^{++\binom{x}{y}}$ also wieder den Kern $\phi(xy)$, also ist

$$A^{++} = A.$$

Ferner haben $cA^{\binom{x}{y}}$ bzw. $A^{\binom{x}{y}} + B^{\binom{x}{y}}$ die Kerne $c\phi(xy)$ bzw. $\phi(xy) + \psi(xy)$, also $(cA)^{+\binom{x}{y}}$ bzw. $(A+B)^{+\binom{x}{y}}$ die Kerne $\overline{c}\phi(yx)$ bzw. $\overline{\phi}(yx) + \overline{\psi}(yx)$. Daher gilt

$$(cA)^+ = \overline{c}A^+$$
$$(A+B)^+ = A^+ + B^+.$$

Endlich hat AB den Kern $\int \phi(xu)\psi(uy)du$, also $(AB)^+$ den Kern

$$\int \overline{\phi}(yu)\overline{\psi}(ux)du = \int \overline{\psi}(ux)\overline{\phi}(yu)du,$$

so dass

$$(AB)^+ = B^+A^+.$$

Sind A und B hermitisch, so ist $A+B$ nach (53) auch hermitisch. Dagegen cA nur dann, wenn c reell ist, und nach (54) AB nur dann, wenn $AB = BA$ ist.

Nach (54) erhält man noch aus

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1},$$
$$(A^{-1})^+A^+ = A^+(A^{-1})^+ = \mathbb{1},$$

also allgemein

$$(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+.$$

Durch Einsetzen in (48) verifiziert man ferner leicht die Beziehungen[1]

$$0^+ = 0; \quad \mathbb{1}^+ = \mathbb{1}; \quad q^+ = q; \quad p^+ = p.$$

Die Grundoperatoren 0, $\mathbb{1}$, q, p sind also selbst hermitisch.

Aus (53), (54) und (56) findet man weiter [56a]

$$s(q)^+ = \overline{s}(q)$$

Für eine beliebige Operatorfunktion $A(pq)$ erhält man endlich die adjungierte Operatorfunktionen $A^+(pq)$, indem man alle Produkte rückwärts liest, und alle Konstanten durch die konjugiert komplexen ersetzt (ausgenommen ϵ selbst; man hat den Übergang zum konjugiert Komplexen, also vor

Further properties of the $^+$ operation should be investigated. Let $A^{\binom{x}{y}}$, $B^{\binom{x}{y}}$ be any (so not self-adjoint) two operators with the respective kernels $\phi(xy)$ and $\psi(xy)$. Then $A^{+\binom{x}{y}}$ has the kernel $\overline{\phi}(yx)$, so again $A^{++\binom{x}{y}}$ the kernel $\phi(xy)$, hence

$$A^{++} = A. \tag{52}$$

Furthermore, $cA^{\binom{x}{y}}$ resp. $A^{\binom{x}{y}} + B^{\binom{x}{y}}$ have the kernels $c\phi(xy)$ resp. $\phi(xy) + \psi(xy)$, hence $(cA)^{+\binom{x}{y}}$ resp. $(A+B)^{+\binom{x}{y}}$ the kernels $\overline{c}\phi(yx)$ resp. $\overline{\phi}(yx) + \overline{\psi}(yx)$. From there it follows that

$$(cA)^+ = \overline{c}A^+ \tag{53a}$$
$$(A+B)^+ = A^+ + B^+. \tag{53b}$$

Finally AB has the kernel $\int \phi(xu)\psi(uy)du$, hence $(AB)^+$ the kernel

$$\int \overline{\phi}(yu)\overline{\psi}(ux)du = \int \overline{\psi}(ux)\overline{\phi}(yu)du,$$

so that

$$(AB)^+ = B^+A^+. \tag{54}$$

If A and B are Hermitian, then by (53) $A+B$ is also Hermitian. In contrast, cA is Hermitian only if c is real, and by (54) AB is only Hermitian if $AB = BA$.

By (54) one still obtains

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1},$$
$$(A^{-1})^+A^+ = A^+(A^{-1})^+ = \mathbb{1},$$

so that generally

$$(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+. \tag{55}$$

By substitution in (48) one easily verifies the relations[2]

$$0^+ = 0; \quad \mathbb{1}^+ = \mathbb{1}; \quad q^+ = q; \quad p^+ = p. \tag{56}$$

Therefore the basic operators 0, $\mathbb{1}$, q, p are themselves Hermitian.

Out of (53), (54) and (56) one finds again [56a]

$$s(q)^+ = \overline{s}(q).$$

For a given operator function $A(pq)$ one finally obtains the adjunct operator function $A^+(pq)$, by reading all products backwards, and replacing all constants with the complex conjugates (except ϵ itself; one has to make the transition to the complex conjugates before performing substitution of p with

Ersetzung von p durch $\epsilon\frac{\partial}{\partial x}$ auszuführen). So ist speziell z.B.

$$(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(q)p^n)^+ = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \overline{s}_n(q).$$

Ist ferner F hermitisch, so gibt es zu ihm stets ein kanonisch konjugiertes G, das ebenfalls hermitisch ist. Sei nämlich G zu F kanonisch konjugiert (aber nicht notwendig selbst hermitisch), so gilt also

$$GF - FG = \epsilon\mathbb{1},$$

und demnach nach (54)

$$\begin{aligned}(GF - FG)^+ = (\epsilon\mathbb{1})^+ &= -\epsilon\mathbb{1},\\ F^+G^+ - G^+F^+ &= -\epsilon\mathbb{1},\\ G^+F^+ - F^+G^+ &= \epsilon\mathbb{1}.\end{aligned}$$

Da nun F hermitisch, also $F = F^+$ sein soll, so ist auch

$$G^+F - FG^+ = \epsilon\mathbb{1},$$

und demnach

$$\frac{1}{2}(G + G^+)F - \frac{1}{2}F(G + G^+) = \epsilon\mathbb{1}.$$

Demnach ist der offensichtlich hermitische Operator

$$G_{\mathbb{1}} = \frac{1}{2}(G + G^+)$$

ebenfalls zu F kanonisch konjugiert.

Als letzten Punkt untersuchen wir schliesslich noch, wie beschaffen der Transformationsoperator T sein muss, damit F und G hermitisch werden.

Aus

$$TqT^{-1} = F; \qquad TpT^{-1} = G$$

wird unter Berücksichtigung von (54), (55) und (56)

$$\begin{aligned}G^+ &= (T^{-1})^+p^+T^+ = (T^+)^{-1}pT^+,\\ F^+ &= (T^{-1})^+q^+T^+ = (T^+)^{-1}qT^+.\end{aligned}$$

$\epsilon\frac{\partial}{\partial x}$). Then in particular

$$(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(q)p^n)^+ = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \overline{s}_n(q). \tag{57}$$

If further F is Hermitian, then it always has a canonical conjugate G that is likewise Hermitian. If G is canonically conjugate to F (but not necessarily itself Hermitian), then

$$GF - FG = \epsilon\mathbb{1},$$

and therefore by (54)

$$\begin{aligned}(GF - FG)^+ = (\epsilon\mathbb{1})^+ &= -\epsilon\mathbb{1},\\ F^+G^+ - G^+F^+ &= -\epsilon\mathbb{1},\\ G^+F^+ - F^+G^+ &= \epsilon\mathbb{1}.\end{aligned} \tag{58}$$

Accordingly, the obviously Hermitian operator

$$G_{\mathbb{1}} = \frac{1}{2}(G + G^+) \tag{59}$$

is likewise canonically conjugate to F.

As a last point we finally investigate what the transformation operator T must be like for F and G to become Hermitian. From

$$TqT^{-1} = F; \qquad TpT^{-1} = G$$

becomes under consideration of (54), (55) and (56)

$$G^+ = (T^{-1})^+p^+T^+ = (T^+)^{-1}pT^+, \tag{60a}$$

$$F^+ = (T^{-1})^+q^+T^+ = (T^+)^{-1}qT^+. \tag{60b}$$

Thus F and G are Hermitian if and only if

$$\begin{aligned}TpT^{-1} &= (T^+)^{-1}pT^+, \text{d.h.} T^+Tp = pT^+T,\\ TqT^{-1} &= (T^+)^{-1}qT^+, \text{d.h.} T^+Tq = qT^+T.\end{aligned}$$

F und G sind also dann und nur dann hermitisch, wenn

$$TpT^{-1} = (T^+)^{-1}pT^+, \text{d.h.} T^+Tp = pT^+T,$$
$$TqT^{-1} = (T^+)^{-1}qT^+, \text{d.h.} T^+Tq = qT^+T,$$

ist. Also muss T^+T mit p und q vertauschbar sein, also auch mit allen Operatorfunktionen von p und q. Dies ist aber nur möglich, wenn T^+T selbst von p und q unabhängig und also gleich einer Konstanten ist

$$T^+T = c^2\mathbb{1}.$$

Da ferner nach (54) und (52)

$$(T^+T)^+ = T^+T^{++} = T^+T$$

ist, also T^+T stets hermitisch ist, so muss (nach 53a) c^2 reell werden. Da man nun T mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren darf, so kann man durch $|c|$ dividieren, und man erhält so als Bedingung dafür, dass F und G hermitisch sind:

$$T^+T = \pm\mathbb{1}, \qquad T = \pm(T^+)^{-1}.$$

Einer Operator mit dieser Eigenschaft nennen wir *hermitisch orthogonal.* Übrigens kommt, wie man leicht zeigt, nur das positive Vorzeichen in Betracht.

Durch die Forderung, dass bei gegebenem hermitischen F der Transformationsoperator T

$$TqT^{-1} = F$$

hermitisch orthogonal sein soll, ist jetzt übrigens umgekehrt T bis auf einen konstanten Faktor vom absoluten Betrag 1 festgelegt.

In der Tat folgt aus

$$TqT^{-1} = F; \qquad TpT^{-1} = G,$$
$$SqS^{-1} = F; \qquad SpS^{-1} = G$$

zunächst

$$T^{-1}Sp = pT^{-1}S; \qquad T^{-1}Sq = qT^{-1}S,$$

woraus wie früher auf

$$T^{-1}S = c\mathbb{1}, \qquad S = cT$$

zu schliessen ist, und wenn sowohl T als auch S hermitisch orthogonal sind, so muss

$$c\bar{c} = |c|^2 = 1$$

Hence T^+T must be exchangeable with p and q, so also with every operator function of p and q. However, this is only possible when T^+T itself depends on p and q and so is equal to a constant

$$T^+T = c^2\mathbb{1}. \tag{61}$$

Further, since if

$$(T^+T)^+ = T^+T^{++} = T^+T$$

by (54) and (52), so that T^+T is always Hermitian, then (by 53a) c^2 must be real. Since one may now multiply T by an arbitrary constant, one can divide by $|c|$, and one obtains as condition for F and G being Hermitian:

$$T^+T = \pm\mathbb{1}, \qquad T = \pm(T^+)^{-1}. \tag{62}$$

An operator with this property we call *Hermitian orthogonal.* Incidentally, as one easily shows, only the positive sign comes into consideration.

Incidentally, by the condition that the transformation operator T should be Hermitian orthogonal for any given F,

$$TqT^{-1} = F,$$

conversely T is determined up to a constant factor of absolute value 1.

In fact it follows from

$$TqT^{-1} = F; \qquad TpT^{-1} = G,$$
$$SqS^{-1} = F; \qquad SpS^{-1} = G$$

first

$$T^{-1}Sp = pT^{-1}S; \qquad T^{-1}Sq = qT^{-1}S,$$

which is to conlude as before

$$T^{-1}S = c\mathbb{1}, \qquad S = cT,$$

and if either T as well as S are Hermitian orthogonal, then it must be that

$$c\bar{c} = |c|^2 = 1. \tag{63}$$

sein.

Ist endlich T hermitisch orthogonal, so ist es T^{-1} offensichtlich auch, und sind T und S beide hermitisch orthogonal, so auch TS, da nach (54) und (62)

$$\begin{aligned}(TS)(TS)^+ &= TSS^+T^+ \\ &= \pm TT^+ = \pm \mathbb{1}\end{aligned}$$

ist. Die hermitisch orthogonalen Operatoren bilden also eine Gruppe.

Finally, if T is Hermitian orthogonal, then likewise T^{-1} is, too, and if T and S are both Hermitian orthogonal, then so is TS, so by (54) and (62)

$$\begin{aligned}(TS)(TS)^+ &= TSS^+T^+ \\ &= \pm TT^+ = \pm \mathbb{1}.\end{aligned}$$

Hence the Hermitian orthogonal operators form a group.

1 Für p ist (48) allerdings nur gewährleistet, wenn $f(u)$ und $g(u)$ im Unendlichen verschwinden. Vermittels der Kerndarstelleng (23b) bestätigt man aber direkt (56) unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $\delta'(x-y)$ eine ungerade Funktion von $(x-y)$ ist. Diese Betrachtung ist übrigens sehr verallgemeinerungsfähig. Hat man eine beliebige Operatorfunktion $F = A(pq)$, so wird bei Selbstadjunktion der Integrand von (48) ein vollständiges Differential eines Ausdruckes von f, g und deren Ableitungen nach u. Damit ist auch wieder gezeigt, dass man im allgemeinen das Bestehen von (48) hermitischem A nur ür solche Funktionen f und g verlangen darf, die an den Integrationsgrenzen (d.h. im Unendlichen) verschwinden, weil man sonst offenbar zuviel verlangt.

2 For p, however, (48) is only guaranteed if $f(u)$ and $g(u)$ vanish at infinity. But by means of the kernel representation one can directly confirm (56) by taking into account that $\delta'(x-y)$ is an odd function of $(x-y)$. Incidentally, this consideration is capable of great generalization. If one has an arbitrary operator function $F = A(pq)$, then by self-adjunction the integrand of (48) becomes a total differential of an expression of f, g and their derivatives with respect to u. This again demonstrates that in general, the insistence on A in (48) being Hermitian may only be demanded for those functions f and g that vanish at the boundaries of integration (i.e., at infinity) because otherwise one apparently demands too much.

8 The physical meaning of the realness conditions

Wir gehen jetzt dazu über, die Bedeutung dieser Resultate für die physikalische Interpretation zu diskutieren. Wir haben gesehen: Die Realität ist für $w(xy;qF)$ sichergestellt, wenn F ein hermitischer Operator ist. Dann gibt es auch ein zu F kanonisch konjugiertes G, das ebenfalls hermitisch ist, und die Transformation von q, p auf F, G wird durch einem im wesentlichen eindeutig bestimmten hermitisch-orthogonalen Operator T erreicht. Ist F dagegen nicht hermitisch, so lässt sich über die Realität nichts aussagen. Wir werden daher annehmen, dass nur hermitische Operatoren eine Bedeutung haben, also physikalische Grössen zugeordnet werden dürfen. Diese Forderung mag zunächst sehr einschneidend erscheinen, sie schränkt aber gerade die Willkür, die bisher noch in der Möglichkeit der Zuordnung der Operatoren zu den mechanischen Grössen bestand, in passender Weise ein. Eine mechanische Grösse hatten wir ja als eine Funktion eines kanonischen Variablenpaares pq angenommen, und den zugehörigen Operator dadurch gewonnen, dass wir diese Funktion als Operatorfunktion ansahen. Diese Zuordnung ist aber nicht eindeutig, da ja bei der Operatorfunktion die Reihenfolge der Faktoren wesentlich ist. Durch passende Anordnung und lineare Kombination verschiedener Anordnungen ist es nun stets möglich, einen hermitischen Operator zu bilden, z.B. ist ja $\frac{1}{2}(A+A^+)$ stets hermitisch. Eine solche "Symmetrisierung" ist auch bisher stets in der Quantenmechanik bei der Aufstellung der Hamiltonschen Funktion gefordert und z.B. bei Schrödinger durch ein Variationsprinzip erreicht worden. Die Symmetrisierung selbst ist nun auch nicht eindeutig, sondern kann noch auf verschiedene Weisen vorgenommen werden.

We go now to discuss the meaning of these results for the physical interpretation. We have seen: the realness of $w(xy;qF)$ is ensured if F is a Hermitian operator. In this case there is also a G canonically conjugate to F, which is always Hermitian, and the transformation of q, p to F, G is clearly achieved through a uniquely-determined Hermitian-orthogonal operator T. On the other hand, if F is not Hermitian, then this alone cannot tell us anything concerning realness. We will therefore assume that only Hermitian operators have a meaning, hence are allowed to be assigned to physical quantities. This restriction may seem quite drastic at first, but it just restricts, in a suitable way, the arbitrariness which so far persists in the possibility of assignment of operators to the mechanical quantities. Indeed we had understood a mechanical quantity as a function of a canonical variable pair pq, and obtained the associated operator by regarding this function as an operator function. However, this assignment is not unique, since the order of factors is essential for the operator function. By suitable arrangement and linear combination of arrangements it is now always possible to construct a Hermitian operator, e.g., $\frac{1}{2}(A+A^+)$ is always Hermitian. Up to now, such a "symmetrization" is also always required in quantum mechanics through the installation of the Hamiltonian function and e.g. by Schrödinger by arriving at a variational principle. Even the symmetrization itself is now not unique, rather it can still be carried out in various ways. However, one can avoid this vagueness in most cases through the following procedure. If one decomposes the expression of the mechanical quantity $F(pq)$ in a given coordinate system into $F_1(p)+F_2(q)$, Man kann diese Unbestimmtheit aber in den meisten Fällen durch folgendes Verfahren umgehen. Zerfällt in einem bestimmten Koordinatensystem der Ausdruck der mechanischen Grösse $F(pq)$ in $F_1(p)+F_2(q)$, also in die Summe einer Funktion von p allein und einer Funktion von q allein, so ist $F(pq)$ als Operatorfunktion schon hermitische (falls nur die Koeffizienten reell sind) und man wird annehmen, dass man damit den richtigen Operator hat. Denkbar sind natürlich auch Erweiterungen, wie z.B. statt $F_1(p)$ auch $\frac{1}{g(q)}F_1(p)g(q)$ zu derselben mechanischen Grösse $F_1(p)$ zugeordnet werden kann.

Im übrigen ist hier gerade der Punkt, an dem Modifikationen der Theorie vorgenommen werden können. Es wird nach dem bisherigen Verfahren der zu einer mechanischen Grösse gehörige Operator dadurch bestimmt, dass man einfach die Funktion $F(pq)$ zugrunde legt, die in der klassischen Mechanik diese Grösse darstellt, wobei eventuell nur, wie gesagt, ein gewisser Symmetrisierungsprozess vorzunehmen ist. Es ist nun keineswegs ausgemacht, ja sogar sehr unwahrscheinlich, dass dies schon in allen Fällen das richtige Rezept darstellt. Es scheint z.B. zu versagen, wenn man versucht, der in der Theorie der Spektren so fundamentalen Hypothese des magnetischen Elektrons Rechnung zu tragen. Ebenso ist es Dirac[1] neuerdings gelungen, durch Einführung einer geeigneten modifizierten Hamiltonschen Funktion die Wechselwirkungen der Atome mit der Strahlung zu behandeln.

Die Wahrscheinlichkeitsamplituden sind durch die obige Forderung, dass der Transformationsoperator hermitisch orthogonal sein soll, ebenfalls nur festgelegt bis auf einen Zahlenfaktor vom Betrage 1. Diese Unbestimmtheit entspricht physikalisch den willkürlichen Phasenkonstanten in der gewöhnlichen Mechanik, doch sei darauf nicht näher eingegangen.

Die Forderung, dass F und G hermitisch seien, bringt es mit sich, dass die Differentialgleichungen (44) für die Amplituden selbstadjungiert werden, und zwar in einem etwas weitern Sinne, als es in der Theorie der Differentialgleichungen üblich ist, da dieser Begriff dabei auch auf Differentialgleichungen mit komplexen Koeffizienten ausgedehnt wird (siehe hierzu Jordan, loc. cit. §3).

Alle Resultate hinsichtlich der Realitätsverhältnisse von $w(xy;qF)$ übertragen sich ganz analog auf $w(xy;F_1F_2)$. Dieses wird reell und nichtnegativ , wenn der zugeordnete Operator $T = T_1^{-1}T_2$ hermitisch orthogonal ist. Dies ist aber wegen der Gruppeneigenschaft sicher der Fall, wenn T_1 und T_2 für sich hermitisch orthogonal sind, was sich stets erreichen lässt, wenn F_1 und F_2 beide hermitisch sind. Wie man leicht sieht, ist dies nicht einmal notwendig. Es genügt, wenn es einen Operator S gibt, so dass SF_1S^{-1} und SF_2S^{-1} hermitisch werden.

1 P.A.M. Dirac, Prc. Royal Soc. A 114 (1927), S. 243.

hence as the sum of a function of p alone and a function of q alone, then $F(pq)$ is already Hermitian as an operator function (only if the coefficients are real) and one will thereby accept that one has the proper operator. Natural extensions are also conceivable, since, for example, instead of $F_1(p)$, $\frac{1}{g(q)}F_1(p)g(q)$ can be assigned to the same mechanical quantity $F_1(p)$.

Incidentally, this is precisely the point at which modifications to the theory can be made. According to the previous procedure, the operator belonging to a mechanical quantity is determined by simply taking as a basis the function which represents this quantity in classical mechanics, which is possible only, as was said, by carrying out a certain symmetrization process. It is in no way agreed, indeed even quite unlikely, that this represents the right recipe in all cases. It appears, e.g., to fail when one attempts to carry it out for the magnetic charge of the electron, the fundamental hypothesis in the theory of spectra. Likewise Dirac has recently succeeded in treating the interaction of the atom with the radiation through the introduction of a suitably modified Hamiltonian function.

The probability amplitudes are, by the above requirement that the transformation operator be Hermitian orthogonal, in any case only determined up to a scalar factor of absolute value 1. This indeterminacy corresponds physically to the arbitrary phase constant in ordinary mechanics, though this will not be entered into further.

The requirement that F and G be Hermitian brings with it that the differential equations (44) for the amplitudes become self-adjoint, and though in a somewhat broader sense, as it usually is in the theory of the differential equations, since this concept extends also to differential equations with complex coefficients.

All results concerning the realness circumstances for $w(xy;qF)$ transfer completely analogously to $w(xy;F_1F_2)$. This is real and non-negative when the assigned operator $T = T_1^{-1}T_2$ is Hermitian orthogonal. However, this is assured on account of the group properties, where T_1 and T_2 are Hermitian orthogonal for themselves, which itself can always be arrived at if F_1 and F_2 are both Hermitian. As one easily sees, even this is not necessary. If S is an operator, then it is enough that SF_1S^{-1} and SF_2S^{-1} are Hermitian.

9 Application of the theory to special cases

Nachdem wir die allgemeine Theorie entwickelt haben, wenden wir sie auf einige wichtige Fälle tatsächlich an und ziehen somit einige Folgerungen aus ihr. Für gegebenes hermitisches F gelten die Differentialgleichungen (44)

$$(F^{\binom{x}{x}} - y)\phi(xy; qF) = 0,$$
$$(G^{\binom{x}{x}} + \frac{\partial}{\partial y})\phi(xy; qF) = 0,$$

wobei G durch

$$GF - FG = \epsilon \mathbb{1}$$

und die Forderung, hermitisch zu sein, bestimmt ist. Man kann also im allgemeinen die Differentialgleichungen aufstellen, ohne den Transformationsoperator T selbst zu kennen. Ist er bekannt, so lassen sich natürlich die Lösungen von (64) sofort hinschreiben. Ist ϕ, wie es meistens der Fall sein wird, bereits durch eine dieser Differentialgleichungen vollständig bestimmt, so muss die andere als Identität erfüllt sein.

Wir untersuchen nun folgende Fälle. Zunächst sei F eine Funktion von q allein:

$$F = f(q).$$

Die Forderung, hermitisch zu sein, besagt dann einfach $f = \overline{f}$, d.h. die Reihentwicklung von $f(x)$ nach x soll reelle Koeffizienten haben. Die Funktionalgleichung (64a) lautet dann

$$(f(q)^{\binom{x}{x}} - y)\phi(xy; qF) = 0,$$
$$(f(x) - y)\phi(xy; qF) = 0.$$

D.h. aus $y \neq f(x)$ folgt $\phi(xy; qF) = 0$. Da nun $w(yx; Fq) = w(xy; qF) = |\phi(xy; qF)|^2$ ist, so ist für $y \neq f(x)$ auch $w(xy; qF) = 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass für gegebenen Wert y der Koordinate die durch F vertretene

After we have developed the general theory, we actually apply it to several important cases and draw some conclusions from it. For a given Hermitian F we obtain the differential equation (44)

$$(F^{\binom{x}{x}} - y)\phi(xy; qF) = 0, \tag{64a}$$
$$(G^{\binom{x}{x}} + \frac{\partial}{\partial y})\phi(xy; qF) = 0, \tag{64b}$$

by which G is determined through

$$GF - FG = \epsilon \mathbb{1} \tag{65}$$

and the requirement that it be Hermitian. One can thus establish in general the differential equation without knowing the transformation operator T itself. If it is known, it naturally allows us to immediately write down the solutions of (64). If ϕ is already fully determined through one of these differential equations, as will usually be the case, then the other must be satisfied as identity.

We now explore the following case. First let F be a function of q alone:

$$F = f(q).$$

The requirement to be Hermitian then simply says $f = \overline{f}$, i.e. the expansion of $f(x)$ by x into a series should have real coefficients. The functional equation (64a) is then

$$(f(q)^{\binom{x}{x}} - y)\phi(xy; qF) = 0,$$
$$(f(x) - y)\phi(xy; qF) = 0.$$

I.e., from $y \neq f(x)$ it follows that $\phi(xy; qF) = 0$, Since now $w(yx; Fq) = w(xy; qF) = |\phi(xy; qF)|^2$, then for $y \neq f(x)$ also $w(xy; qF) = 0$, The probability that the quantity represented by F lies in the interval ab for a given value y of the coordinate,

$$\int_a^b w(yx; Fq)dx,$$

Grösse im Intervall ab liegt,

$$\int_a^b w(yx;Fq)dx,$$

verschwindet also auch, falls $f(x)$ nicht in diesem Intervall liegt, d.h. diese Grösse verhält sich genau so wie die Funktion $f(x)$ selbst. Für Funktionen von q allein haben wir also dieselbe strenge funktionale Abhängigkeit wie in der gewöhnlichen Mechanik.

Als nächsten wichtigen Fall nehmen wir $F = p$, suchen also $w(xy;qp)$. Auch dieses F ist nach unseren früheren Ausführungen hermitisch. Das zugehörige G können wir leicht funden. Es ist der ebenfalls hermitische Operator $-q$, wie aus dem Bestehen der Relation

$$GF - FG = -qp + pq = \epsilon \mathbb{1}$$

hervorgeht. $\phi(xy;qp)$ genügt also den Differentialgleichungen [65a,b]

$$(-q + \epsilon \frac{\partial}{\partial y} \phi(xy;qp) \equiv (-x + \epsilon \frac{\partial}{\partial y})\phi(xy;qp) = 0,$$
$$(p - y)\phi(xy;qp) \equiv (\epsilon \frac{\partial}{\partial x} - y)\phi(xy;qp) = 0;$$

hieraus folgt, bis auf einen gleichgültigen Faktor, [66a]

$$\phi(xy;qp) = e^{\frac{xy}{\epsilon}},$$

und da $-q$ und p hermitisch sind, [66b]

$$\phi^{-1}(yx;pq) = \overline{\phi}(xy;qp) = e^{-\frac{xy}{\epsilon}}.$$

Also wird

$$w(xy;qp) = w(yx;pq) = 1,$$
$$\int_a^b w(yx;pq)dy = b - a,$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass für einen gegeben Koordinatenwert der Impuls innerhalb eines bestimmten Intrervalles liegt, ist proportional zu der Grösse dieses Intervalles, das bedeutet aber, dass alle Werte des Impulse gleichwahrscheinlich sind.

Der zu Transformation q in p gehörige Operator–wir bezeichnen ihn zum Unterschied von anderen Operator mit P–ist

$$P^{\binom{x}{y}} f(y) = \int e^{\frac{xy}{\epsilon}} f(y)dy.$$

Die letzten Resultate sind alle ohne weiteres auch für die Wahrschein-

therefore also vanishes in case $f(x)$ does not lie in this interval, i.e. this quantity behaves exactly as the function $f(x)$ itself. For functions of q alone, we have the same strict functional dependence as in ordinary mechanics.

As our next important case we set $F = p$, so search for $w(xy;qp)$. According to our previous execution this F is again Hermitian. We can easily find the associated G. It is the likewise Hermitian operator $-q$, as is evident from the existence of the relation

$$GF - FG = -qp + pq = \epsilon \mathbb{1}.$$

$\phi(xy;qp)$ hence satisfies the differential equations [65a,b]

$$(-q + \epsilon \frac{\partial}{\partial y} \phi(xy;qp) \equiv (-x + \epsilon \frac{\partial}{\partial y})\phi(xy;qp) = 0,$$
$$(p - y)\phi(xy;qp) \equiv (\epsilon \frac{\partial}{\partial x} - y)\phi(xy;qp) = 0;$$

from this it can be concluded, up to a trivial factor, [66a]

$$\phi(xy;qp) = e^{\frac{xy}{\epsilon}}, \tag{66}$$

and so that $-q$ and p are Hermitian, [66b]

$$\phi^{-1}(yx;pq) = \overline{\phi}(xy;qp) = e^{-\frac{xy}{\epsilon}}.$$

Hence

$$\begin{aligned} w(xy;qp) = w(yx;pq) = 1, \\ \int_a^b w(yx;pq)dy = b - a, \end{aligned} \tag{67}$$

i.e., the probability that the momentum lies within a certain interval for a given coordinate value is proportional to the size of these intervals, which means, however, that the all values for the momentum are equally probable.

The operator to transform q into p–unlike with other operators, we call it P–is

$$P^{\binom{x}{y}} f(y) = \int e^{\frac{xy}{\epsilon}} f(y)dy. \tag{68}$$

The last results readily transfer to the probability relations of any functions lichkeitsbeziehungen beliebiger Funktionen F_1 und F_2, also für $w(xy; F_1F_2)$ zu übertragen. Es sei zunächst $F_2 = f(F_1)$, d.h. F_2 eine Funktion von F_1 allein. Wir suchen nun einen Operator S, so dass

$$SqS^{-1} = F_1$$

wird. Dann bekommen wir

$$Sf(q)S^{-1} = f(SqS^{-1}) = f(F_1) = F_2,$$

und es wird nach (40)

$$w(xy; F_1F_2) = w(xy; (SqS^{-1})(Sf(q)S^{-1})) = w(xy; qf(q)),$$

d.h. auch hier geht wieder die Wahrscheinlichkeitsabhängigkeit in eine rein funktionale wie in der klassischen Mechanik über.

Zweitens betrachten wir noch den Fall, dass

$$GF - FG = \epsilon \mathbb{1}$$

sei, also F und G zueinander kanonisch konjugiert sind. Dann gibt es zunächst ein S, so dass

$$SqS^{-1} = F; \qquad SpS^{-1} = G$$

ist. Ferner ist mit dem in (68) eingeführten P

$$p = PqP^{-1},$$

also

$$(SP)q(SP)^{-1} = G.$$

Daher können wir $T_1 = S$; $T_2 = SP$ setzen, also

$$T = T_1^{-1}T_2 = P.$$

Daraus folgt aber wieder nach (68) und (4)

$$\phi(xy; FG) = e^{\frac{xy}{\epsilon}}, \qquad \phi^{-1}(yx; GF) = e^{\frac{xy}{\epsilon}}$$
$$w(xy;GF) = \mathbb{1},$$

d.h. F und G stehen wieder in derselben Beziehung zueinander, wie Koordinate und Impuls. Das bedeutet physikalisch, dass alle Variablensysteme (pq) gleichberechtigt sind, die durch kanonische Transformationen im Sinne der Qunatenmechanik verknüpft sind.

F_1 and F_2, hence for $w(xy; F_1F_2)$. Firstly, let $F_2 = f(F_1)$, i.e., F_2 be a function of F_1 alone. We now search for an operator S such that

$$SqS^{-1} = F_1$$

We obtain

$$Sf(q)S^{-1} = f(SqS^{-1}) = f(F_1) = F_2,$$

and so by (40)

$$w(xy; F_1F_2) = w(xy; (SqS^{-1})(Sf(q)S^{-1})) = w(xy; qf(q)),$$

i.e., here, too, we again change to the probability dependency as purely functional as in the classical mechanics.

Secondly, we consider the case where

$$GF - FG = \epsilon \mathbb{1},$$

thus F and G are canonically conjugate to one another. Firstly, this gives an S such that

$$SqS^{-1} = F; \qquad SpS^{-1} = G$$

Further, with the introduction of P in (68)

$$p = PqP^{-1},$$

hence

$$(SP)q(SP)^{-1} = G.$$

Therefore we can assign $T_1 = S$; $T_2 = SP$, so that

$$T = T_1^{-1}T_2 = P.$$

But from this it follows again by (68) and (4)

$$\phi(xy; FG) = e^{\frac{xy}{\epsilon}}, \qquad \phi^{-1}(yx; GF) = e^{\frac{xy}{\epsilon}}$$
$$w(xy;GF) = \mathbb{1}, \tag{69}$$

i.e., F and G again stand in the same relation to one another, as coordinate and momentum. Physically this means that all variable systems (pq) are equally justified, which are connected by the canonical transformations in the sense of quantum mechanics.

10 Schrödinger's differential equations

Wir kommen jetzt zu der wichtigsten Anwendung der Theorie, nämlich der Ableitung und Interpretation der Schrödingerschen Differentialgleichungen. Man gelangt zu ihnen, wenn man nach dem Wahrscheinlichtkeitzusam-

We come now to the most important application of the theory, namely the derivation and interpretation of the Schrödinger differential equations. One arrives at these when one asks for the probability connection between energy menhang zwischen Energie und Koordinate fragt. Die Energie ist in der klassischen Mechanik in der Hamiltonschen Funktion $H(pq)$ als Funktion von Koordinate und Impuls dargestellt. Diese Hamiltonschen Funktion wählen wir dementsprechend (natürlich wie bei Schrödinger nach passender Symmettrisierung) als unser F. Ferner führen wir für den Wert von F statt y die Bezeichnung W ein, um zu kennzeichnen, dass diese Grösse hier die Energie darstellt. Dann wird die Differentialgleichung (64a)

$$\{H(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}, x) - W\}\phi(xW; qH) = 0,$$

das ist aber genau die gewöhnliche Schrödingersche Differentialgleichung.

Ihre Interpretation ist nach den in §5 festgelegten Gesichtspunkten folgende. $\phi(xW; qH) = \overline{\phi}(Wx; Hq)$ ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass die wirkliche Lagekoordinate des Systems einen Wert zwischen x und $x + dx$ hat, wenn der Wert W der Energie vorgegeben ist. Wenn nun die Schrödingergleichung, wie es im allgemeinen der Fall ist, diskrete Eigenwerte und Eigenfunktionen hat, so kommt in $\phi(xW; qH)$ statt der kontunuierlichen Abhängigkeit von W eine Aufspaltung in die einzelnen Eigenfunktionen zustande. D.h. es ist

$$\phi(xW_n; qH) = \psi_n(x),$$

wo ψ_n die n-ten zu dem Eigenwert W_n gehörige Eigenfunktion ist. Damit ist zunächst die in der Einleitung angegebene physikalische Deutung der Eigenfunktionen von Pauli als Speziallfall der allgemeinen Theorie erkannt; denn es ist nun $|\psi_n(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lagekoordinate des Systems einen Wert zwischen x und $x+dx$ hat, wenn das System selbst sich im n-ten Zustand befindet. Für $W \neq W_n$ gibt es hingegen keine überall reguläre im Unendlichen verschwindende Funktion, die der Differentialgleichung genuügt. D.h. aber, die Wahrscheinlichkeit, dass für einen solchen Energiewert die Koordinate des Systems in einem endlichen Intervall angetroffen wird, ist verschwindend klein, d.h. solche Zustände kommen nicht vor.

Die zweite inhomogene Schrödingersche Differentialgleichung mit eliminierter Energkiekonstante W erhält man, indem man die zu $H(pq)$ kanonisch konjugierte Grösse $t(pq)$ als unser $F(pq)$ nimmt. Dann wird nämlich aus (64b)

$$\{H(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}, x) + \epsilon\frac{\partial}{\partial y}\}\phi(xy; qt) = 0,$$

and position. In classical mechanics, the energy is represented in the Hamiltonian function $H(pq)$ as a function of coordinate and momentum. Accordingly, we select this Hamiltonian function (naturally as in Schrödinger according to appropriate symmetry) as our F. Further we introduce for the value of F instead of y the designation W, in order to indicate that this quantity represents the energy. This becomes the differential equation (64a)

$$\{H(\epsilon\frac{\partial}{\partial x}, x) - W\}\phi(xW; qH) = 0, \tag{70}$$

but that is exactly the ordinary Schrödinger differential equation.

Its interpretation according to the standpoints of §5 is as follows. $\phi(xW; qH) = \overline{\phi}(Wx; Hq)$ is the probability amplitude that the actual position coordinate of the system has a value between x and $x + dx$, when the value W of the energy is set beforehand. Now when the Schrödinger equation, as is generally the case, has discrete eigenvalue and eigenfunctions, then instead of the continuous dependence of W there comes about a splitting in $\phi(xW; qH)$ into the individual eigenfunctions. I.e.,

$$\phi(xW_n; qH) = \psi_n(x), \tag{71}$$

where ψ_n is the eigenfunction belonging to the n-th eigenvalue W_n. With this it is recognized that the physical interpretation of the eigenfunctions of Pauli given in the introduction is a special case of the general theory; for now $|\psi_n(x)|^2$ is the probability that the position coordinate of the system has a value between x and $x + dx$ for when the system finds itself in the n-th state. For $W \neq W_n$, however, there is no vanishing function that is everywhere regular at infinity which satisfies the differential equation. That is, however, the probability for such an energy value that the coordinate of the system is found in a finite interval is vanishingly small, i.e. such a state does not occur.

One satisfies the two inhomogeneous Schrödinger differential equations with the elimination of the energy constant W, in which one takes the quantity $t(pq)$ that is canonically conjugate to $H(pq)$ as our $F(pq)$. This is namely also gerade die zweite Schrödingergleichung

$$\{H(\epsilon\frac{\partial}{\partial x},x)+\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\}\psi(x,t)=0,$$

wenn man für y die Zeit t einsetzt. Es ist also in der Quantenmechanik auch der Zeit ein Operator zugeordnet, und zwar gerade der zu der Hamiltonschen Funktion kanonisch konjugierte. Dies entspricht übrigens ganz der gewöhnlichen Mechanik, in der man ebenfalls t als die zu der Energie kanonisch konjugierte Variable auffassen kann.

Die physikalische Bedeutung der Lösung $\psi(x,t)$ dieser Differentialgleichung ist also, dass sie die Amplitude dafür darstellt, dass zu einem gegebenen Zeitpunkt t die Koordinate in ein bestimmtes Intervall fällt. Dies entspricht auch der Interpretation, die Born ihr gegeben hat[1].

Die Schrödingerschen Differentialgleichungen sind immer nur jedesmal eine der beiden allgemeinen Differentialgleichungen der Quantenmechanik. Die andere ist dann von selbst mit erfüllt. Sie liefern dabei Identitäten, die man ebenfalls physikalisch interpretieren kann (siehe hierzu Jordan, loc. cit.).

Wir sind im vorhergehenden immer so verfahren, als ob alle Variablen in einem kontinuierlichen Gebiet veränderlich wären, während physikalisch ja gerade die Fälle von besonder Wichtigkeit sind, in denen diskrete gequantelte Zustände auftreten, und daher die Variablen auch diskontinuierliche Wertebereiche zu durchlaufen haben. Unser Vorgehen ist aber zunächst durchaus konsequent und umfasst ohne weiteres auch diese letzten diskontinuierlichen Fälle, da wir ausdrücklich uneigentliche Funktionen wie $\delta(x-y)$ eingeführt haben, deren Auftreten nichts anderes beduetet, als dass die entsprechenden Variablen nur gewisser diskreter Werte fähig sind. Durch Einführung dieser Funktion kann man stets Summen als Integrale über solche uneigentliche Funktionen auffassen, und so kontinuierliche und diskrete Wertbereiche formal gleichmässig behandeln. Die allgemeine Lösung von (70) also $\phi(xW;qH)$ kann man dann formal in einem einzigen Ausdruck

$$\phi(xW;qH)=\sum_n c_n\psi_n(x)\delta(W-W_n)+\psi(xW)c(W)$$

zusammenfassen, wobei im allgemeinen ein diskreter und kontinuierlicher Bestandteil entsprechend dem diskreten und kontinuierlichen Termspektrum von W auftreten wird. Die Normierungskonstanten bzw. Funktion c_n bzw. $c(W)$,

from (64b)

$$\{H(\epsilon\frac{\partial}{\partial x},x)+\epsilon\frac{\partial}{\partial y}\}\phi(xy;qt)=0,$$

hence just the second Schrödinger equation

$$\{H(\epsilon\frac{\partial}{\partial x},x)+\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\}\psi(x,t)=0, \tag{72}$$

when one puts in the time t for y. Hence in quantum mechanics an operator is also assigned the time, and indeed is just the canonical conjugate of the Hamiltonian function. Incidentally, this corresponds completely with ordinary mechanics, in which one can in any case interpret t as the variable canonically conjugate to the energy.

The physical meaning of the solution $\psi(x,t)$ of this differential equation is that it represents the amplitude for the coordinate falling in a fixed interval at a given point in time t. This also corresponds with the interpretation Born has given[2]

Schrödinger's differential equations are only in each case one of the two general differential equations of quantum mechanics. The other is then satisfied by itself. In this case they provide identities that one can likewise interpret physically.

In the foregoing we have proceeded as if all variables would vary in a continuous domain, while physically just the cases of particular importance are those in which conditions are quantized, and therefore the variables also have to run through discontinuous ranges of values. However, for the moment, our proceeding is throughout quite consistent and comprehensive without these last discontinuous cases, since we have expressly introduced as $\delta(x-y)$ improper functions whose occurrence has no other meaning than that the corresponding variables are only able to take certain discrete values. Through the introduction of this function one can always understand sums as integrals over such improper functions, and so formally treat continuous and discrete value ranges equally. One can therefore combine the general solution for (70) in a single expression [74]

$$\phi(xW;qH)=\sum_n c_n\psi_n(x)\delta(W-W_n)+\psi(xW)c(W),$$

whereby in general there occur a discrete and continuous component corresponding to the discrete and continuous term spectrum of W. The normalization constants c_n of respective function $c(W)$, which specify the statistical a priori probabilities of individual discrete quantum states resp. the interval die die statistischen a priori Wahrscheinlichkeiten der einzelnen diskreten Quantenzustände bzw. der Intervalle des kontinuierlichen Spektrums angeben, lassen sich dabei im Prinzip aus der Forderung berechnen, dass der Transformationsoperator hermitisch-orthogonal sein soll. In diesem Sinne ist die Theorie also durchaus vollständig und es bedarf zu der Erledigung solcher Fragen keiner neuen physikalischen Axiome. Auch kann man formal durch geeignete Anwendung der uneigentlichen Funktionen den ganzen Kalkül als eine Art Matrizenrechnung formulieren und damit den eingentlich diskontinuierlichen Charakter der Quantenmechanik deutlich zum Ausdruck bringen. Dies ist im wesentlichen die Methode von Dirac.

Vom mathematischen Standpunkt ist aber die dabei eingeschlagene Rechnungsweise, besonders wenn man etwa versucht, solche Fragen wie die obige nach den statischen Gewichten zu behandeln, ziemlich unbefriedigend, da man nie sicher ist, in welchem Umfange die dabei auftretenden Operationen wirklich zulässig sind. Deshalb sehen wir zunächst von der weiteren Ausführung dieser Gedanken ab. Wir hoffen jedoch, bei anderer Gelegenheit auf diese Fragen zurückkommen zu können[3].

of the continuous spectrums, can in principle be calculated from the requirement that the transformation operator should be Hermitian-orthogonal. In this sense the theory is quite complete and no new physical axioms are needed to handle such questions. Formally it is also possible, by appropriate application of the improper functions, to formulate the whole calculus as a kind of matrix calculus and thus clearly express the true discontinuous character of quantum mechanics. This is essentially the method of Dirac.

However, from the mathematical standpoint the way of calculating covered, especially when one tries to treat such questions as the above regarding the statistical weights, is rather unsatisfying, since one is never sure to what extent the appearing operations are really to be permitted. However, for the present moment we refrain from further elaboration of these thoughts. However, we hope to be able to return to these thoughts on another occasion.[4]

1 M. Born, Zeitschr. f. Phys. 40 (1925), S. 167. Die allgemeine Lösung von (72)

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{\frac{2\pi i}{h} W_n t}$$

wird dort so interpretiert, dass $\left| c_n e^{\frac{2\pi i W_n t}{h}} \right|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür angeben soll, dass das Atom sich im n-ten Quantenzustand befindet. $c_n e^{\frac{2\pi i W_n t}{h}}$ ist dann in unserem Sinne als Amplitude hierfür zu betrachten. Das einzelne Summenglied in (73) ist dann die Amplitude dafür, dass sowohl das Atom sich *im n-ten Zustand* befindet und die Koordinate einen bestimmten Wert hat, und der ganze Ausdruck (73) die Amplitude dafür, dass das Atom *in irgendeinem Zustand* sich befindet und die Koordinate einen bestimmten Wert hat, was mit obigem übereinstimmt. Mit den Amplituden lässt sich also wie mit gewöhnlichen Wahrscheinlichkeiten rechnen.

2 The general solution of (72) [73]

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{\frac{2\pi i}{h} W_n t}$$

is there so interpreted that $\left| c_n e^{\frac{2\pi i W_n t}{h}} \right|^2$ should indicate the probability that the atom is found in the n-th quantum state. $c_n e^{\frac{2\pi i W_n t}{h}}$ is thus in our terms to be regarded as amplitude. The single sum element in (73) is then the amplitude for both the atom to be in the n-th state and the coordinate has a determinate value, and the whole expression (73) that the atom is in any state and the coordinate has a determinate value, which agrees with the above. Thus with the amplitudes we can calculate as with ordinary probabilities.

3 Vgl. eine demnächst in den Göttinger Nachrichten erscheinende Abhandlung: “Mathematische Begründung der Quantenmechanik” von J. v. Neumann.

4 Cf. a treatise soon to appear in the Göttigen Nachtrichten: “Mathematical Foundations of Quantum Mechanics” by J. v. Neumann.